INTRODUCCIÓN A LA ASTRONOMÍA Y A LA ASTROFÍSICA

de la

Olimpiada Nacional de Astronomía en México

J. Eduardo Mendoza Torres

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica

Tonantzintla, Puebla
2010

Autor:
J. Eduardo Mendoza Torres

Revisión:
Omar Yam
Abril Santos

This book was typeset in LaTeX by Erika Tecuatl

PRÓLOGO

En este texto se describen algunos conceptos básicos de Astronomía y Astrofísica y se incluyen preguntas y ejercicios en los que se aplican esos conceptos. También incluimos unas secciones en donde se repasan algunos conceptos matemáticos básicos que pueden ser de ayuda en la solución de los ejercicios.

Se incluye la solución de muchos ejercicios esperando que los interesados puedan revisar los procedimientos e incluso repasen algunos conceptos que han visto en clases de Matemáticas a través de aplicaciones en Astronomía sin embargo también se pueden proponer otras alternativas de solución. Los ejercicios son de diferentes niveles de dificultad y recomendamos que los más difíciles los resuelvan en grupo. Los ejercicios pueden servirles tanto a estudiantes interesados en Astronomía como para profesores que quieran usarlos en sus cursos de Física y Matemáticas. Algunos de ellos se plantearon en las olimpiadas de Astronomía que se han realizado en México. Así, el material de este texto también puede servir para estudiantes interesados en participar en futuras olimpiadas. Esperamos que el presente trabajo pueda ser de utilidad a estudiantes y profesores que quieran incursionar en la Astronomía con el uso de herramientas básicas de Matemáticas.

Queremos externar nuestro agradecimiento a colegas que nos ayudaron con comentarios y sugerencias y por su apoyo para la elaboración de este texto a Erika Tecuatl, Abril Santos, Omar Yam y Abraham Luna.

Eduardo Mendoza Torres

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Astronomía de posición

El hombre ha observado el cielo desde tiempos remotos. Los mayas, los chinos asi como los incas hacían observaciones astronómicas, en particular para identificar las épocas mas propicias para sembrar, cosechar, etc. Algunas culturas, como la griega y la árabe consideraban que las estrellas formaban figuras a las que se les llama constelaciones y a las que les daban nombres de acuerdo a su mitología. También se han usado las estrellas para orientarse en la navegación. Por ello, para la humanidad ha sido importante asignarle coordenadas a las estrellas para así ubicarlas más fácilmente.

En ocasiones cuando nos vemos en la necesidad de encontrar la casa de un amigo o una tienda, sólo con su dirección nos podemos ayudar de un mapa. En esos casos, aunque no lo decimos explícitamente, estamos usando un sistema de coordenadas.

En cualquier sistema de coordenadas es necesario tener referencias ya sean líneas o puntos. Por ejemplo, en una ciudad una referencia muy importante es el lugar en el que se cruzan las calles principales, y a la zona que la rodea generalmente se le conoce como el centro de la ciudad. En las siguientes secciones se describen brevemente algunas referencias que se usan en Astronomía y se dan algunas definiciones de utilidad, empezando con las relativas a las coordenadas geográficas que son las coordenadas que se usan para identificar posiciones sobre la superficie de la Tierra.

1.1. Coordenadas geográficas

El cielo no se ve igual desde cualquier lugar sobre la superficie de la Tierra. Estando en un sitio vemos unas estrellas mientras que en otro lugar podemos ver estrellas que no se ven desde el primer sitio. Para entender las diferencias en la ubicación sobre la Tierra es importante conocer los conceptos de coordenadas terrestres, los cuales veremos a continuación.

Eje Polar: es un eje imaginario alrededor del cual gira la Tierra en su movimiento de rotación. El *Eje Polar* pasa por los polos de la Tierra.

Ecuador terrestre: es la circunferencia imaginaria que divide a la superficie de la Tierra en dos partes iguales y que es perpendicular al eje de rotación de está. (Figura 1.1)

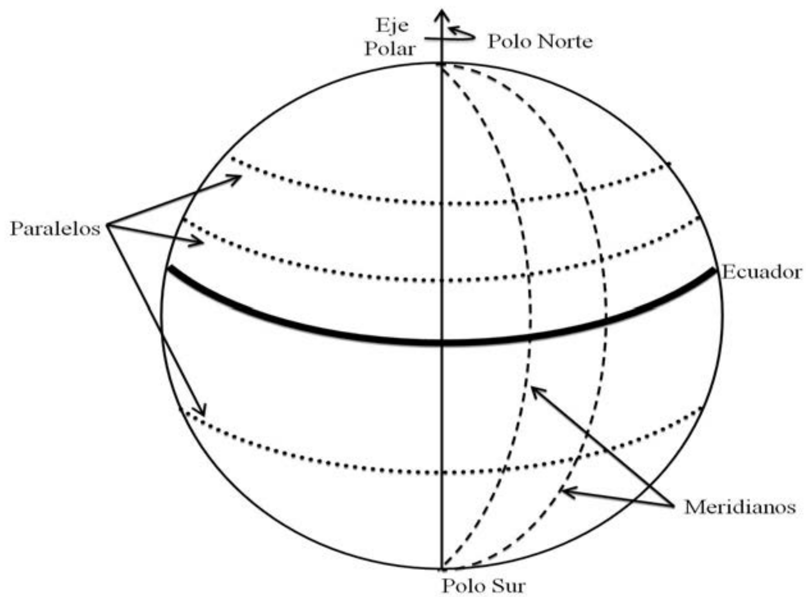

Figura 1.1: En esta figura se muestran esquemáticamente algunas líneas imaginarias sobre la superficie de la Tierra. La línea gruesa denota al Ecuador, el cual divide a la superficie de la Tierra en dos partes iguales. Los paralelos se trazan con solo cumplir que sean líneas sobre la superficie en un plano *paralelo* al Ecuador. Los *meridianos* se representan por las líneas a trazos que van de un polo al otro.

Plano Ecuatorial: es un plano imaginario sobre el cual está el *Ecuador terrestre*.

Paralelo: es una circunferencia imaginaria sobre la superficie de la Tierra que va en dirección Este-Oeste y es paralela al *Ecuador* terrestre (líneas punteadas en la Figura 1.1).

Meridiano de un lugar dado: es la semicircunferencia que va de un polo de la Tierra al otro polo pasando sobre dicho lugar (líneas a trazos en la Figura 1.1). Los *meridianos* los podemos imaginar como las rebanadas que hacemos a un melón.

Meridiano de Greenwich: es el *meridiano* que pasa por el observatorio de Greenwich en Inglaterra. A partir de él se mide la *longitud terrestre*, es decir, la *longitud* del *meridiano de Greenwich* es de cero grados (0°). En la Figura 1.2 se ilustra el *meridano* que pasa por la ciudad de Puebla, México y en la Figura 1.5 el *meridiano* que pasa por la ciudad de Anchorage, Alaska.

Longitud geográfica de un lugar dado : es el ángulo medido en el plano del *Ecuador*, entre el *meridiano* de dicho lugar y el *meridiano de Greenwich*. La *longitud* se mide hacia el Oeste del *meridiano* de Greenwich para sitios que estén a longitudes de menos de 180° (Figuras

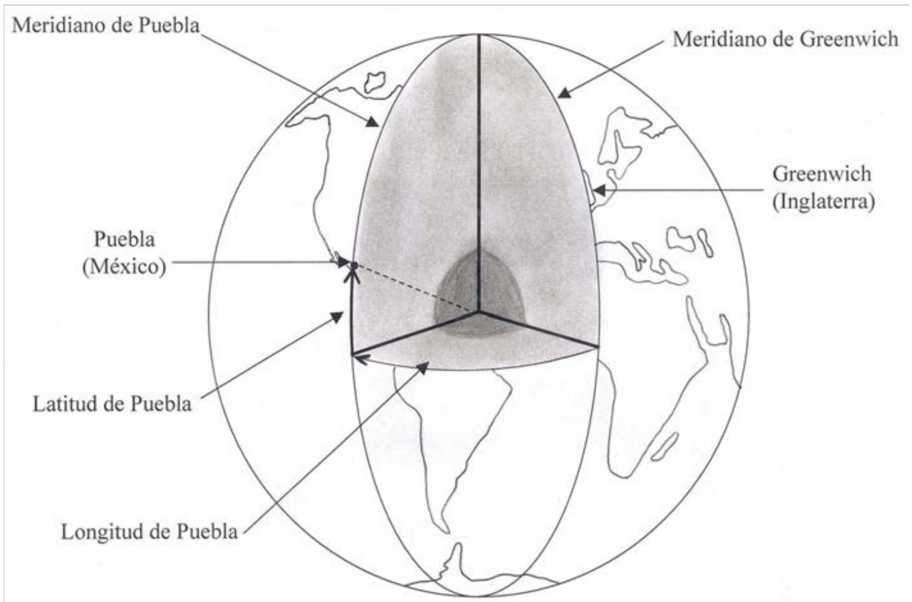

Figura 1.2: En esta figura se muestra esquemáticamente cómo se miden la *longitud terrestre* y la *latitud geográfica* usando el ejemplo de la ciudad de Puebla, México. Ambos parámetros son ángulos que se representan como arcos sobre la superficie terrestre. Se miden como si tuvieramos líneas rectas desde el centro de la Tierra hasta dos puntos de intersección del Ecuador con dos *meridianos*; el *meridiano de Greenwich* (que se toma como referencia y el *meridiano* de Puebla). El arco sobre el *Ecuador terrestre* denota la *longitud* de la ciudad de Puebla. El arco que sale del Ecuador y se dibuja sobre el *meridiano* denota la *latitud* de Puebla.

1.2 y 1.5) y al Este para sitios que estén a valores menores de 180° hacia el Este. Sin embargo, para hacer comparaciones entre sitios es conveniente usar los valores de la *longitud geográfica* referida a una de las direcciones ya sea Oeste ó Este. En la Figura 1.2 se ilustra con un arco de circunferencia la *longitud geográfica* para la ciudad de Puebla. Se acostumbra denotar la *longitud geográfica* con la letra l.

Latitud geográfica de un lugar dado: es el ángulo medido a lo largo del *meridiano* de dicho lugar entre el plano del Ecuador y el lugar dado (Figura 1.2). Se acostumbra denotar la *latitud geográfica* con la letra ϕ.

Culminación de una estrella en un lugar dado : es el momento en que dicha estrella pasa por el *meridiano* de dicho lugar.

Una estrella alcanza su mayor *altura* durante su *culminación*. Es importante hacer notar que la *culminación* de una estrella depende de la *longitud geográfica* del lugar. Una estrella puede culminar al mismo tiempo en dos lugares distintos si estos tienen la misma *longitud geográfica*.

La **Culminación superior** corresponde al momento en que la estrella pasa por enfrente

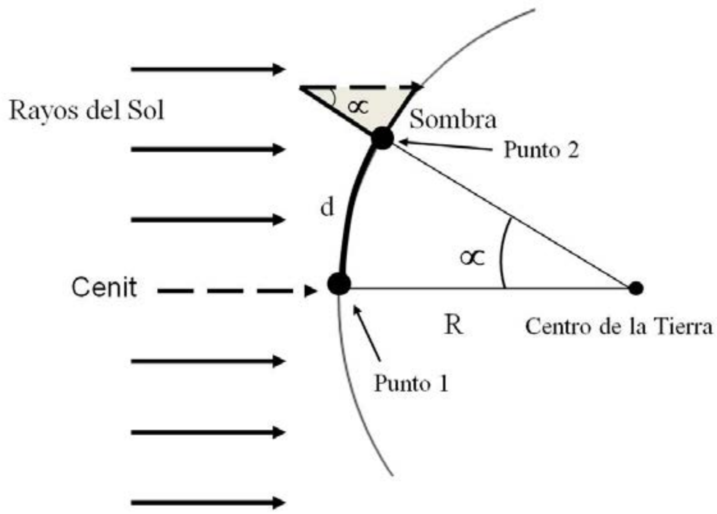

Figura 1.3: Representación de los rayos solares incidiendo sobre un objeto vertical. Debido a que los rayos inciden inclinados respecto a dicho objeto entonces se produce una sombra. En esta figura se indica el tríangulo que forman un rayo de luz que pasa sobre el extremo superior del objeto, el objeto y su sombra. También se representa el tríangulo formado entre el centro de la Tierra y dos sitios, en uno de ellos está el objeto que produce sombra. En el otro lugar ese mismo día no se produce sombra durante la *culminación* del Sol.

del meridiano y la La **Culminación inferior** al momento en el que pasa por la parte opuesta, es decir, la estrella no se ve porque está en el hemisferio que queda por debajo del *horizonte* del observador.

1.2. Definiciones básicas de Astronomía Esférica

Para una persona en la Tierra las estrellas parecen estar sobre una esfera. Por esta razón, en Astronomía se usa el concepto de esfera Celeste y las posiciones de las estrellas se estudian como si estuvieran en dicha esfera y la Tierra estuviera en su centro, es decir nosotros vemos la esfera desde su interior. Las siguientes definiciones ayudan a tener referencias en la esfera Celeste.

Cenit: es el punto de la esfera Celeste que está sobre el observador. Una persona en París, Francia tiene un cenit que es distinto al cenit de una persona en Río de Janeiro, Brasil.

Nadir: es el punto de la esfera Celeste que está por debajo del observador (Este concepto es importante aunque sea un punto que no vemos).

Círculo mayor: es el círculo que resulta de la intersección de un plano con una esfera y que la divide en dos partes iguales (semiesferas). En el caso de la esfera Celeste un círculo mayor pasa por la Tierra.

Círculo menor: es el círculo que resulta de la intersección de un plano con una esfera y que la divide en partes diferentes. Esto significa que el plano de dicha esfera no pasa por el centro de la misma.

Polo Norte Celeste y **Polo Sur Celeste**: son los puntos en los que el *Eje Polar* intersecta a la esfera Celeste. El Polo Norte Celeste está muy cerca de la estrella llamada estrella polar, una estrella en la ″*cola*″ de la constelación de la Osa Menor.

Ecuador Celeste: es la circunferencia en la esfera Celeste sobre el *Plano Ecuatorial*. El Ecuador Celeste lo podemos visualizar como la circunferencia que resulta de proyectar el *Ecuador terrestre* en la esfera Celeste.

Paralelo diario: es cualquier circunferencia de la esfera Celeste que es paralela al Ecuador Celeste. El movimiento diurno de una estrella ocurre a lo largo de un ″*paralelo diario*″.

Círculo horario de una estrella: es el círculo de la esfera Celeste que pasa a través de los polos y de dicha estrella.

1.3. Las estrellas vistas desde diferentes latitudes terrestres

Para los que vivimos en el hemisferio Norte la estrella polar la podemos ver en una noche despejada. Sin embargo, desde el hemisferio Sur no se ve esa estrella. Con este ejemplo es claro que en un lugar se ven estrellas que no pueden verse desde otro lugar. A continuación vamos a ver algunas definiciones que nos van a ayudar a entender la causa de esto.

Vertical: es la línea recta imaginaria que va del Cenit al Nadir. Si un observador toma una plomada entonces el hilo de dicha plomada está alineado con la *vertical*.

Plano horizontal: es el plano imaginario perpendicular a la *vertical* de un observador dado. El plano horizontal divide a la *esfera Celeste* en 2 semiesferas. Una de ellas está sobre el observador, es decir es la semiesfera observable. En la cúspide de dicha semiesfera está el Cenit. La otra semiesfera no la ve dicho observador y en su cúspide está el Nadir. En la Figura 1.5 se ilustra el *plano horizontal* para la ciudad de Anchorage en Alaska. Se muestra el cenit para una persona que está en dicha ciudad. Se puede ver claramente que el *plano horizontal* de esta ciudad no es *paralelo* al *Eje Polar*. Esto tiene consecuencias en las trayectorias aparentes de las estrellas, como veremos posteriormente.

Horizonte de un observador dado: es la intersección del *plano horizontal* de dicho observador y la esfera Celeste.

Este y **Oeste**: son los puntos en los que el Ecuador Celeste cruza el horizonte de un observador. Cuando sea conveniente usaremos las letras **E** y **W** respectivamente para referirnos a ellos.

Meridiano Celeste de un lugar: es la circunferencia en la esfera Celeste que pasa por los polos y el cenit de dicho lugar. Para visualizar los *meridianos Celestes* también podemos imaginar que los *meridianos* producen rebanadas tipo melón en la esfera Celeste.

1.4. Variación debida a la rotación de la Tierra sobre su eje

Ahora ya sabemos que una persona en la ciudad de Puebla, México, no ve las mismas estrellas que una persona en Moscú, Rusia ó una en Quito, Ecuador. Podemos atribuirle esta diferencia a las *latitudes* de estos lugares. Ahora, vamos a ver un concepto muy importante para entender la razón de que las estrellas parecen moverse en el cielo.

Movimiento diurno de las estrellas: es el movimiento aparente de las estrellas en la esfera Celeste debido a la rotación de la Tierra. En dicho movimiento las estrellas giran en torno al *Eje Polar*. En las Figuras 1.14, 1.15 y 1.16 se muestran las trayectorias de estrellas debido al movimiento diurno como se observan en diferentes *latitudes* sobre la Tierra.

La Tierra además de girar sobre su propio eje tiene dos movimientos adicionales relacionados con su eje que son la *precesión* y la *nutación*.

Precesión: es el movimiento del eje de rotación de un cuerpo como resultado de este movimiento el eje no apunta siempre hacia el mismo lugar. El caso mas esquemático de este fenómeno lo vemos en un trompo. Cuando el eje del trompo se mantiene en la misma dirección mientras el trompo gira se dice que el trompo se durmió. En se caso, la dirección del eje se mantiene constante y el trompo no presenta movimiento de *precesión*. Sin embargo, si el trompo recibe un leve empujón mientras gira entonces su eje empieza a girar, ya no esta durmiendo como cuando no precesaba sino que ahora "está bailando" decimos de manera coloquial.

Los planetas y en particular la Tierra presentan movimiento de *precesión*. En el caso de la Tierra, dicho movimiento se debe a que la fuerza de atracción gravitacional del Sol no es uniforme. Esto se debe a que la Tierra no es esférica, la zona del ecuador es más extendida que la zona de los polos como resultado de la rotación sobre su eje. Además, el eje de rotación de la Tierra está inclinado respecto al plano de la eclíptica. Entonces la fuerza de atracción gravitacional del Sol tiende a "jalar" la zona del Ecuador hacia el plano de la eclíptica. Esto es similar al empujón que le damos a un trompo para que "empiece a bailar".

El polo de la Tierra actualmente apunta hacia la estrella polar. Sin embargo, debido al movimiento de *precesión* la dirección va cambiando ligeramente año con año (Figura 1.22) hasta que la dirección a la que apunta el *Eje Polar* en el cielo de una vuelta completa (como se indica con las líneas en la parte superior e inferior de la Figura 1.22 y en la parte superior de la Figura 1.23). El tiempo que tarda en dar una vuelta es de aproximadamente 26,000 años.

La *precesión* del eje terrestre conduce a variaciones de la *ascención recta* y la *declinación* de las estrellas. Aunque estas variaciones no son grandes, se deben de tomar en cuenta cuando se quiere observar alguna estrella específica. Como el movimiento del eje produce un desplazamiento del *Punto Vernal* entonces la variación debida a la *precesión* influye más en la *ascención recta* que en la *declinación*.

Nutación: es un movimiento del eje de la Tierra que, se superpone al movimiento de *precesión*. Debido a este movimiento, el eje de la Tierra se mueve en oscilaciones como las que se muestran en la Figura 1.23. Este movimiento se debe a que la órbita de la Luna está inclinada respecto a la eclíptica. Debido a eso, el plano de la órbita de la Luna es "jalado" por la fuerza de atracción del Sol produciendo un movimiento de *precesión* del plano de la órbita de la Luna. Dicho movimiento, al igual que la *precesión* del eje terrestre tiene un período. El período de *precesión* de la órbita de la Luna es de 18.6 años. La *precesión* de la órbita de la Luna produce perturbaciones en el eje de la Tierra con el mismo período (18.6 años).

1.5. Sistema horizontal de coordenadas Celestes

Este sistema horizontal se basa en las posiciones de las estrellas que ve un observador dependiendo del lugar en el que está. En este sistema de coordenadas las referencias principales son el *plano horizontal* y el Norte sobre dicho plano.

Ejemplos de las trayectorias de las estrellas los podemos ver en las Figuras 1.14, 1.15 y 1.16. Vamos a tratar de formular claramente una pregunta basándonos en la principal diferencia de estas figuras ¿Por qué las trayectorias son inclinadas respecto al *plano horizontal* en Puebla y en Moscú y no en Quito? Para responder esta pregunta tenemos que recordar que la Tierra gira sobre el *Eje Polar*. Además, vamos a ver otras definiciones que nos van a ayudar a encontrar la respuesta a la pregunta anterior.

Círculo vertical de una estrella: es el círculo mayor de la esfera Celeste que pasa por dicha estrella y el cenit de un observador dado (una sección del círculo vertical se muestra como la zona vertical sombreada en la Figura 1.18).

Altura de una estrella: es el ángulo (medido sobre el círculo vertical) desde el plano horizontal hasta la estrella (Figura 1.18). La *altura* puede tomar valores de entre 0° y 90°. La *altura* de una estrella es diferente, en general, para dos observadores a distitntas *latitudes*. La *altura* la vamos a denotar con la letra a.

Acimut de una estrella: es un ángulo que se mide sobre el plano horizontal en el sentido de las manecillas del reloj, puede tomar valores entre 0° y 360° y se define de alguna de las dos siguientes maneras:

a) Como el ángulo que va del Norte hasta el punto en el que se cruzan el círculo vertical de dicha estrella y el horizonte (Figura 1.18). Al *acimut* lo vamos a denotar con la letra A.

b) También se usa el *acimut* tomando como referencia el Sur en lugar del Norte. En la siguiente tabla la equivalencia entre el *acimut* referido al Sur (A_S) y el *acimut* referido al Norte (A_N) se puede ver.

A_S	A_N	Relación entre A_N y A_S
0° a 180°	180° a 360°	$A_N = A_S + 180°$
180° a 360°	0° a 180°	$A_N = A_S - 180°$

Distancia cenital: es el ángulo entre el Cenit y la estrella. La respuesta a la pregunta que nos formulamos al inicio de la sección anterior ya la podemos dar. Las trayectorias en las Figuras 1.14, 1.15 y 1.16 se ven inclinadas por que el plano horizontal de los observadores está inclinado respecto al eje de rotación de la Tierra.

La respuesta al por qué en algunos lugares las trayectorias de las estrellas son inclinadas es porque el Eje Polar está inclinado respecto al plano horizontal de dichos lugares.

1.6. Referencias en la órbita de la Tierra

Sabemos que durante el invierno vemos algunas estrellas particulares, por ejemplo, las llamadas estrellas de los " tres reyes magos", también conocidas como las "tres Marías". Esas estrellas las vemos durante el invierno y algunos meses posteriores pero no las vemos en verano.

La Tierra se mueve alrededor del Sol. En cada posición de la Tierra sobre su órbita solo podemos ver las estrellas que están en el lado contrario del Sol. Por ejemplo, cuando la Tierra está en el lado izquierdo de la Figura 1.17 no vemos las estrellas que están en el lado derecho de la esfera Celeste, en la misma figura. Por eso, en una época del año vemos unas estrellas que no vemos en otra época. Para visualizar esto, se usan referencias relacionadas a la órbita de la Tierra que veremos a continuación.

Plano de la eclíptica: es un plano sobre el cual la Tierra describe su movimiento de traslación alrededor del Sol. Por esta razón, visto desde la Tierra, el Sol se mueve en la esfera Celeste trazando, en el transcurso de un año, una trayectoria que es precisamente la eclíptica. El *Plano Ecuatorial* está inclinado 23,5° respecto al plano de la eclíptica (Figura 1.19).

Eclíptica: Es la circunferencia en la esfera Celeste que traza el Sol a lo largo de un año (ver Figura 1.17). La eclíptica cruza el Ecuador Celeste en dos puntos, uno de ellos ocurre en el *equinoccio* de primavera (Este lugar se denota con la letra griega γ) y el otro en el *equinoccio* de otoño (Figura 1.19).

Equinoccio: es el momento en el que la trayectoria del Sol cruza el Ecuador Celeste. El *equinoccio* ocurre dos veces al año, alrededor del 21 de marzo y del 22 de septiembre. El día de un *equinoccio* la duración de la noche y del día son iguales.

Punto Vernal: es el punto en la esfera Celeste en el que el Sol cruza el Ecuador Celeste cuando pasa del hemisferio Sur al Norte.

Solsticio: es el momento en el que el Sol está en su posición extrema ya sea al Sur (*solsticio* de invierno, el cual ocurre en torno al 21 de diciembre) ó al Norte (*solsticio* de verano, que ocurre cerca del 21 de junio). El día del *solsticio* de verano se tienen más horas con luz del Sol en el hemisferio Norte (posición izquierda de la Tierra en la Figura 1.17). En el *solsticio* de invierno el Sol se ve menos horas en el hemisferio Norte (posición derecha de la Tierra en la Figura 1.17).

1.7. Sistemas de coordenadas ecuatoriales

Este sistema se basa en la posición de la Tierra respecto de las estrellas. Por eso estas coordenadas no dependen de la posición del observador sobre la Tierra. Es decir, son las mismas coordenadas para alguien que está en Moscú que para alguien que está en Puebla. Las referencias en este sistema son el *Plano Ecuatorial* y el *Punto Vernal*.

Coordenadas ecuatoriales absolutas: Declinación y Ascención Recta

Declinación de una estrella: es el ángulo medido sobre el círculo horario de la estrella, que va desde el *Ecuador Celeste* hasta la estrella (Figura 1.20) y se denota con la letra griega δ. La declinación toma valores negativos (de -90° a 0°) para estrellas que están al Sur del *Ecuador Celeste* y valores positivos (de 0° a 90°) para estrellas que están al Norte del *Ecuador Celeste*. Por lo anterior, es claro que la *declinación* de un punto que está sobre el *Ecuador Celeste* es cero, la del punto que está sobre el Polo Norte es 90° y la del que está sobre el Polo Sur es $-90°$.

En la esfera Celeste se puede trazar una circunferencia imaginaria equivalente a un *paralelo terrestre* (Fig. 1.1), para esto es suficiente trazar sobre dicha esfera una circunferencia en la cual todos los puntos tienen la misma *declinación*.

Ascensión recta de una Estrella: es el ángulo que se forma entre el *Punto Vernal* y la intersección del círculo horario de dicha estrella con el Ecuador Celeste (Figura 1.20). La *ascensión recta* se mide hacia el Este sobre el Ecuador Celeste y puede tomar valores entre 0 y 24 horas (se denota con la letra griega α).

Debido a que el *Punto Vernal* también se mueve por el movimiento diurno, al igual que las estrellas que vemos de noche, entonces la *ascensión recta* de dichas estrellas no cambia con la rotación de la esfera Celeste. Sin embargo, la *ascención recta* del Sol varía a lo largo del año entre 0 y 24 horas por su movimiento en la esfera Celeste. Debido a la inclinación del eje terrestre la *declinación* del Sol varía de + 23.5° a -23.5° también a lo largo del año.

1.7.1. Coordenadas ecuatoriales locales: Declinación y Angulo Horario

La Declinación: como se definió en la sección anterior también se usa en este sistema. La otra coordenada es el *ángulo horario*.

Angulo horario de una estrella : es el ángulo medido sobre el Ecuador Celeste, que va del punto de intersección del *meridiano celeste* del observador y el ecuador hasta el círculo horario que pasa por dicha estrella. El *ángulo horario* se mide de Este a Oeste y puede tomar valores entre 0 y 24 *horas*. Si sobre la esfera Celeste trazamos una semicírcunferencia en la cual todos los puntos tienen el mismo *ángulo horario* tenemos un trazo similar al de un *meridiano terrestre*. El sistema ecuatorial de declinación y *ángulo horario* se usa principalmente para la determinación del tiempo.

1.7.2. Relación entre α, s y h

Vamos a suponer que una estrella tiene *ascención recta* α. También vamos a suponer que la observamos desde un lugar al momento en el que la *hora sideral* en dicho sitio es s. Si para ese momento el *ángulo horario* de la estrella (vista desde el lugar mencionado) es h entonces la relación entre su *hora sideral* (s), su *ángulo horario* (h) y su *ascención recta* de la estrella (α) es

$$s \ = \ h \ + \ \alpha. \tag{1.1}$$

Esta ecuación se puede usar para conocer la *hora sideral* de un lugar.

1.7.3. Transformación de coordenadas horizontales a ecuatoriales

Vamos a suponer que observamos una estrella desde un lugar cuya *latitud* es ϕ y que para un momento dado las coordenadas horizontales de dicha estrella son *acimut* A y *altura* a, con el *acimut* referido al Sur. A partir de los valores anteriores podemos conocer el *ángulo horario* h y la *declinación* de la estrella usando las siguientes ecuaciones:

$$sen\ h\ cos\ \delta \ = \ sen\ A\ cos\ a. \tag{1.2}$$

$$cos\ h\ \ cos\ \delta \ = \ cos\ A\ cos\ a\ sen\ \phi \ + \ sen\ a\ cos\ \phi. \tag{1.3}$$

$$sen\ \delta \ = \ - \ cos\ A\ cos\ a\ cos\phi \ + \ sen\ a\ sen\ \phi. \tag{1.4}$$

1.7.4. Transformación de coordenadas ecuatoriales a horizontales

Vamos suponer que una estrella tiene coordenadas ecuatoriales α y δ. También vamos a suponer que esa estrella en el momento que la observamos está a un *ángulo horario* h desde el lugar donde estamos, y que dicho lugar está a una *latitud geográfica* ϕ. Entonces, las coordenadas horizontales, *acimut* (A) y *altura* (a), con el *acimut* referido al Sur, se pueden calcular a partir de las siguientes ecuaciones:

$$sen\ A\ cos\ a\ =\ sen\ h\ cos\ \delta. \tag{1.5}$$

$$cos\ A\ cos\ a\ =\ cos\ h\ cos\ \delta\ sen\ \phi\ -\ sen\ \delta\ cos\ \phi. \tag{1.6}$$

$$sen\ a\ =\ cos\ h\ cos\ \delta\ cos\ \phi\ +\ sen\ \delta\ sen\ \phi. \tag{1.7}$$

Para pasar el *acimut* referido al Norte se pueden usar los valores de la Tabla 1.5.

1.8. Hora solar y hora sideral

La *hora solar* se mide tomando como referencia al Sol. El momento en el que el Sol pasa por el *meridiano* de un lugar son las 12:00 horas en *tiempo solar*. Sólo para hacer una comparación con el tiempo sideral,vamos a suponer que en dicho momento empezamos a medir el tiempo solar y entonces, como es nuestra referencia, lo vamos a considerar el tiempo inicial cero.

La *hora sideral* de un lugar dado se mide tomando como referencia el *Punto Vernal*. La hora sideral es el *ángulo horario* del *Punto Vernal* desde dicho lugar. Por lo tanto, también ocurre que en el momento en el que el *Punto Vernal* pasa por el *meridiano* del lugar son las 0:00 horas en *tiempo sideral* para dicho lugar.

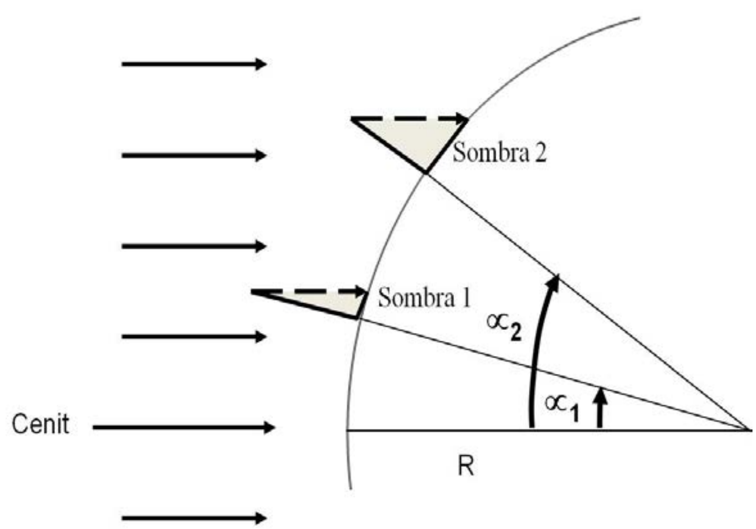

Figura 1.4: Representación de dos triángulos que se forman a partir de objetos verticales y sus sombras. Cada uno de estos triángulos tiene un triángulo semejante del centro de la Tierra hacia dichos lugares y hacia el lugar en el que no se produce sombra, es decir, a un lugar en el que el Sol está en el cenit durante su *culminación*.

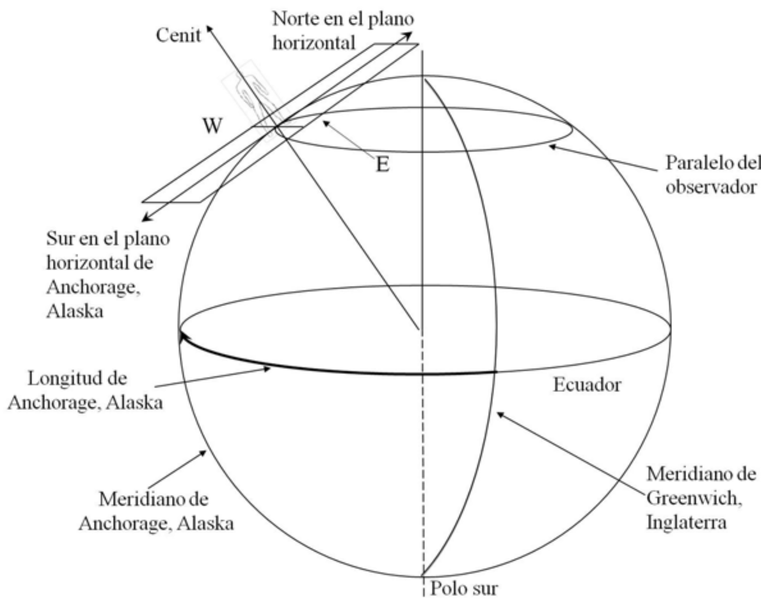

Figura 1.5: En esta figura se muestra el plano horizontal para la ciudad de Anchorage, Alaska. La línea cerrada en la parte superior de la figura que por la perspectiva se ve como elipse, denota el *paralelo* terrestre que pasa por Anchorage. La línea curva que va de polo a polo denota al *meridiano de Greenwich* y la semicircunferencia del lado izquierdo denota al *meridiano* de Anchorage. El arco sobre el ecuador denota la *longitud* de Anchorage.

1.9. Sombras de objetos a diferentes latitudes

Vamos a analizar la situación en la que el Sol está iluminando dos lugares distintos en la Tierra. Si esos lugares están a diferentes *latitudes geográficas* y en un mismo *meridiano*, entonces tenemos una situación como la representada en la Figura 1.3. Vamos a analizar el caso particular en el que en uno de los lugares no se produce sombra durante su *culminación* porque el Sol está en su cenit. Sin embargo, en el otro lugar sí se produce sombra. La extensión de la sombra depende de la ubicación de dicho lugar sobre la Tierra y también depende del radio de la Tierra. Si el sitio está cerca del lugar en el que el Sol está en el cenit entonces la sombra es pequeña. A medida que nos alejamos de dicho lugar la longitud de la sombra aumenta. Esto, lo notó Eratóstenes y midiendo la distancia entre los dos lugares pudo medir el radio terrestre. Sin embargo, como veremos más adelante no es necesario que el Sol esté en el cenit de alguno de los lugares, es decir, se puede medir el radio terrestre con base en las mediciones en dos lugares donde sí se produce sombra durante la *culminación*.

1.10. Prácticas para realizar en equipo

1.10.1. Práctica para determinar la orientación del meridiano local y la culminación del Sol

Debido a que la luz del Sol es muy intensa, las sombras son más definidas cuando el cielo está despejado. Durante el día la sombra de un objeto estático cambia de tamaño. También la orientación cambia, por ejemplo al amanecer el Sol está en el Este y por lo tanto la sombra de un objeto estará en su lado Oeste. Si el Sol está en el Sur del sitio entonces su sombra apuntará hacia el Norte. De la experiencia diaria sabemos que la sombra es más larga al amanecer ó al atardecer y es más corta al medio día incluso, hay días particulares en los que al medio día en algún sitio los objetos casi no proyectan sombra. En la Figura 1.3 se representan con líneas horizontales rayos del sol incidiendo sobre diferentes lugares. La línea a trazos representa un rayo incidiendo perpendicularmente a la superficie. En dicho lugar el Sol está en el cenit durante la *culminación*. En sitios cercanos a este sitio la sombra es pequeña. A medida que nos alejemos de este sitio la extensión de la sombra será más grande. El objeto, el haz de luz que pasa junto al extremo del objeto, y la sombra de éste forman un triángulo (Figura 1.3). Dicho triangulo está relacionado con el radio de la Tierra y la distancia entre el sitio donde se mide la sombra y el sitio donde el Sol está en *culminación*.

El Sol aparece en el cenit durante su *culminación* en sitios con latitudes entre $-23{,}5$ y $23{,}5$. A *latitudes mayores* a $23.5°$ y menores a $-23{,}5°$ el Sol no llega a estar en el cenit en ninguna época del año. Debido a eso, en dichos lugares, un objeto vertical producirá sombra durante todo el año (aunque la longitud varía a lo largo del año).

Por lo anterior, resulta que la sombra de un objeto nos puede servir para trazar una línea en la dirección del *meridiano* de un lugar y también para identificar la hora de la *culminación* del Sol en un sitio dado.

Instalación del mástil, tripié ó asta

Para la instalación del mástil se sugieren los siguientes materiales:

1. Tubo, palo ó tripié
2. Una plomada ó en su lugar un hilo con una tuerca
3. Gises ó crayolas (si es posible que sean lavables)
4. Flexómetro ó cinta métrica
5. Nivel de burbuja

El mástil se tiene que instalar sobre una superficie plana y debe tener una base para mantenerse fijo mientras se hacen las mediciones. Sugerimos que en la parte alta del mastil ó tripié coloques un objeto delgado ó un objeto con punta como el cono de cartón que está en la parte alta del tubo en la Figura 1.6. Para identificar la superficie adecuada puedes usar el nivel de burbuja y elegir la zona mejor nivelada. Para poner el mástil ó el tripié usa la plomada de tal manera que quede verticalmente y que la línea que va de la base hasta la punta del mastil esté a plomada. En nuestro caso, el objeto es un tubo sobre un tripié y usamos el suelo directamente para trazar las líneas de la sombra ya que teníamos una superficie adecuada para pintar con gis (Figura 1.6). Si fuera más conveniente podrías usar un papel ó una cartulina para dibujar los trazos.

Figura 1.6: Trazos de las sombras del tripié en el suelo para varios tiempos. En el extremo de la sombra se trazó una cruz para denotar la longitud de la sombra en cada tiempo. Los tiempos están anotados junto a la cada línea.

1.10.2. Práctica para determinar la hora de la culminación del Sol (paso del Sol por el meridiano del lugar)

La hora en la que el Sol pasa por el *meridiano* de un lugar dado se determina con base en la extensión de la sombra que produce el mástil. Sugerimos hacer una tabla de datos en la que escribas en una columna la hora en la que se hace la medición y en otra columna la medición de la extensión de la sombra para cada tiempo. En la Figura 1.9 tenemos la gráfica de la extensión de la sombra contra el tiempo para datos tomados en Tonantzintla, Puebla. Podemos ver que a las $10:00\ AM$ la sombra era grande y fue disminuyendo hasta tener un valor mínimo alrededor de las 13 horas ($1:00\ PM$). Después de esa hora, la sombra fue creciendo. Dibujamos una curva suave (línea a trazos) sobre los datos observados y encontramos que el mínimo valor ocurrió a las $12:40$ horas. Ese fue el momento en el que el Sol pasó ese día sobre el *meridiano* del lugar

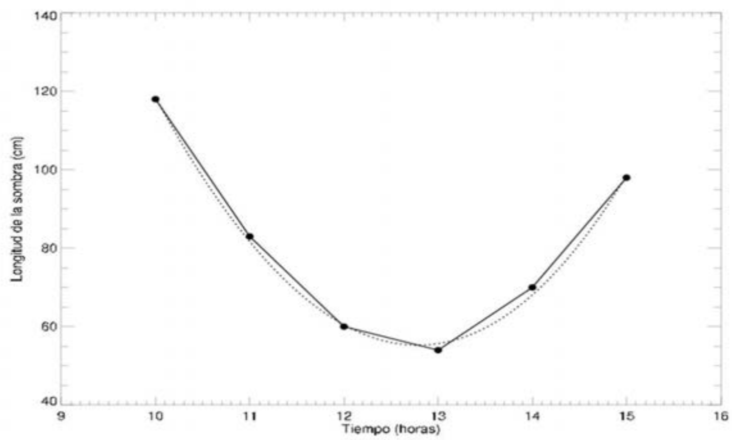

Figura 1.7: Gráfica de las extensiones de la sombra contra el tiempo. Se puede ver que la sombra llega a un valor mínimo y después vuelve a crecer. Con una línea punteada se indica la curva que se ajustó a los datos observados mediante un programa de ajuste de polinomios. La línea se puede dibujar a mano. En este caso, es conveniente hacer mediciones en intervalos de tiempo menores, por ejemplo, cada diéz minutos para tener más precisión.

en el que hicimos estas mediciones (Tonantzintla, Puebla). Si se cuenta con los programas para hacer ajustes, entonces es conveniente hacer el ajuste de un polinomio, en la gráfica identificar a los datos observados. Con base en dicho ajuste se puede encontrar el valor mínimo así como el tiempo en el que ocurrió éste.

1.10.3. Trazo de una línea en la dirección del meridiano de un lugar

Vamos a trazar una línea en la dirección del *meridiano* de un lugar, es decir una línea en dirección Norte-Sur. Para esto, es necesario dibujar una línea a lo largo de la sombra y una cruz en cada uno de los extremos de la sombra, en cada una de las líneas anotamos la hora en que se midió como se muestra en la Figura 1.6.

Una vez que tenemos las líneas y las cruces, trazamos una línea que pase sobre los extemos de las sombras, esta línea está orientada en dirección Este-Oeste (EW). Sugerimos anotar Este y Oeste en cada extremo de la línea, como se muestra en la Figura 1.9. Ahora, quitamos el mástil y en esa posición colocamos un extremo de una cuerda. En el otro extremo de la cuerda colocamos un gis. Vamos a elegir una longitud de la cuerda de tal manera que al trazar un arco de círculo cruce la línea EW en dos puntos, uno en el lado este y otro en el lado Oeste. Con el gis trazamos el arco de círculo estando seguros que lo cruza en dos puntos. Si lo cruzara sólo en un punto entonces hacemos un poco más corta la distancia a la que ponemos el gis. Ahora, ya tenemos un arco de círculo que cruza la línea EW en dos puntos. Medimos la distancia entre esos dos puntos y trazamos una cruz en la mitad. De este punto trazamos una recta hasta el punto en el que estaba el mástil. Esa línea está orientada en la dirección del *meridiano* del lugar (Figura 1.10). Es conveniente escribir Norte y Sur en los extremos de esta línea. Si el lugar de las mediciones está en el hemisferio Norte entonces la base del mástil está en el Sur respecto

Figura 1.8: En esta imagen se está trazando un segmento de arco con una cuerda que está en el punto sobre el que se colocó el mástil, se ve el trazo de una línea sobre las cruces (que denotan los extremos de las sombras). Esta línea está orientada de Este a Oeste. La *longitud* de la cuerda se elige de tal manera que el arco cruce en dos puntos a la línea Este-Oeste. La línea que va de la mitad entre dichos puntos de cruce y la base del mástil está alineada en dirección Norte-Sur.

de las sombras. Si las mediciones se hicieron en el hemisferio Sur entonces la base del mástil está en el Norte.

1.11. Ejercicios con solución

1.11.1. Angulo equivalente a 100 km

Supongamos que sobre la superficie de la Tierra en un lugar donde no hay montañas tenemos dos sitios separados por una distancia de 100 km. ¿A qué ángulo corresponde dicha distancia?
Respuesta
Para calcular el ángulo sólo tenemos que recordar que la circunferencia de la Tierra (a la que suponemos de 40000km para visualizar mejor el procedimiento) es equivalente a 360°. Entonces, la equivalencia entre un ángulo α y una distancia d la encontramos empleando la ecuación

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{d}{40000}. \tag{1.8}$$

En nuestro caso necesitamos saber el ángulo, entonces lo despejamos en la Ecuación 1.8

$$\alpha = 360^\circ \times \frac{d}{40000}. \tag{1.9}$$

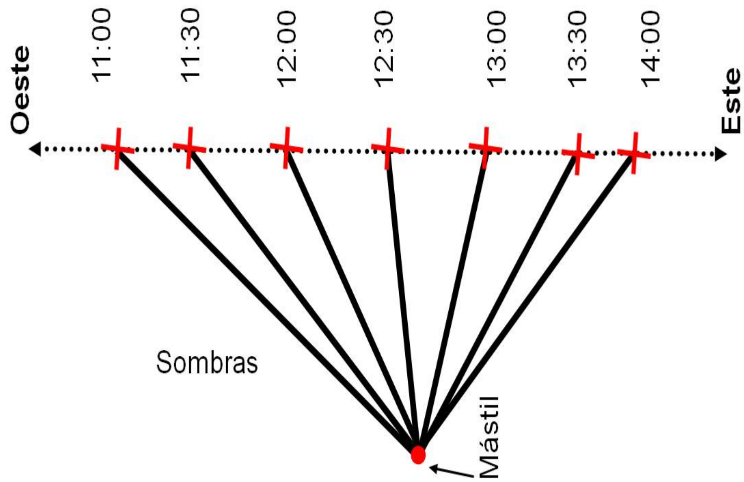

Figura 1.9: Representación de las longitudes de las sombras para varios tiempos. La extensión de la sombra se denota con una cruz en el extremo de cada línea. Como el Sol aparece en el lado Este entonces las primeras sombras están en el lado Oeste. También se muestra el trazo de una línea sobre los extremos de las sombras. Esta línea está orientada en dirección Este-Oeste.

Sustituyendo $d = 100$ km tenemos que

$$\alpha = 360^\circ \times \frac{100\text{km}}{40000\text{km}} \tag{1.10}$$

lo cual es

$$\alpha = 0{,}9^\circ = 54' \tag{1.11}$$

es decir, una distancia de 100 km representa una diferencia en ángulos un poco menor a un grado.

1.11.2. Diferencia de latitudes

Las ciudades de Mc Allen, Texas (Estados Unidos) y Puebla (México) están ambas aproximadamente en *longitudes geográficas* de 98°. Se sabe que la circunferencia de la Tierra es de aproximadamente 40000 km y para hacer una estimación en este ejercicio vamos a usar Este valor. Si Mc Allen está a una *latitud* de 26° y Puebla a una *latitud* de 19° ¿cuál es la distancia entre estas ciudades?

Respuesta

La diferencia de latitudes es una fracción del ángulo total que cubre la circunferencia. Este último ángulo es de 360°, entonces dicha fracción es

$$\frac{\Delta l^\circ}{360^\circ} \tag{1.12}$$

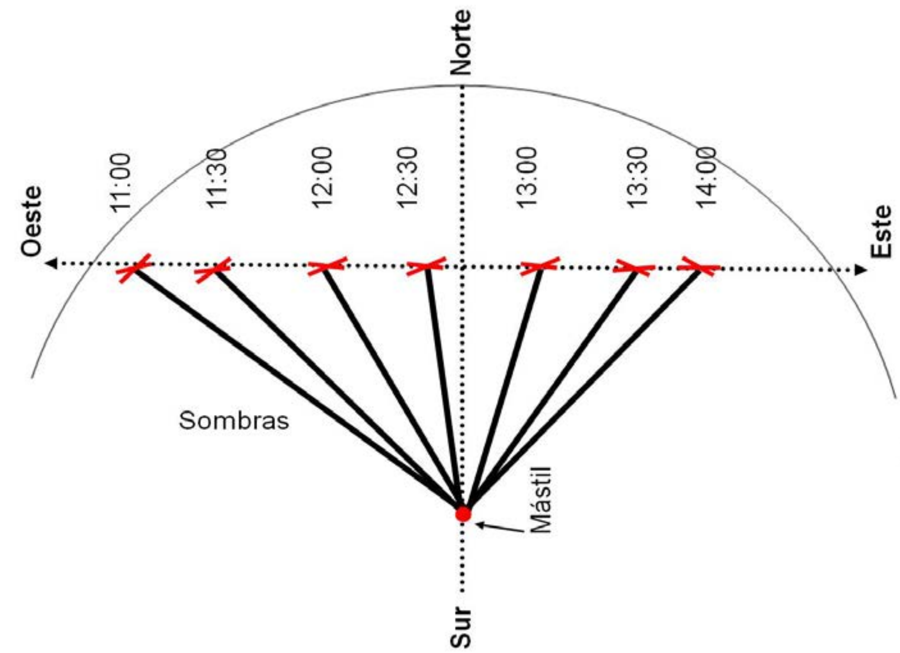

Figura 1.10: Trazo de un arco de circunferencia. La *longitud* del hilo para trazar el arco la elige el observador de tal manera que cruce a la línea Este-Oeste en dos puntos. Se mide la distancia entre esos dos puntos y a la mitad de dicha distancia se traza una cruz. De dicha cruz a la base del mástil se traza otra línea. La línea que va de la mitad de la línea Este-Oeste y la base del mástil está alineada en dirección Norte-Sur como se inidica en esta figura.

Por otro lado, la distancia entre las ciudades (a la que denotaremos por d) es una fracción de la circunferencia de la Tierra. Esta fracción es

$$\frac{d \text{ km}}{40000 \ \text{ km}} \tag{1.13}$$

Como estas fracciones se encontraron a partir de los mismos puntos sobre una circunferencia de la Tierra y corresponden a la misma parte de un todo (en un caso es una fracción de toda una vuelta ó 360° y en otro de toda la circunferencia), entonces las fracciones son iguales. Es decir

$$\frac{d \text{ km}}{40\ 000 \ \text{ km}} = \frac{\Delta l^\circ}{360^\circ} \tag{1.14}$$

de esta ecuación despejamos d que resulta ser

$$d = (40000 \text{ km}) \times \frac{\Delta l}{360^\circ}. \tag{1.15}$$

Ahora, calculamos la diferencia de latitudes que es

$$\Delta l = 26\ ^\circ - 19\ ^\circ = 7\ ^\circ. \tag{1.16}$$

Entonces la distancia entre Puebla y Mc Allen es

$$d = (40000 \text{ km})\frac{7\ ^\circ}{360^\circ} \tag{1.17}$$

que es

$$d = \ 778 \text{ km}. \tag{1.18}$$

1.11.3. Lugares en diferentes latitudes

La ciudad de Quito, Ecuador está a una latitud aproximada de 0°, si la *culminación* del Sol en San Andros, Bahamas, ocurre a la misma hora que en Quito,
a) ¿Cuál es la diferencia en las *longitudes geográficas* de estas ciudades?
b) ¿Cuál es la *latitud geográfica* de San Andros si en esta ciudad el Sol se ve a una *altura* de 65° en el momento en que en Quito el Sol está en el cenit?
Nota: En realidad la *latitud* de Quito es diferente de cero pero tomando en cuenta que las distancias entre las Quito y San Andros es grande usamos cero para simplificar el problema y hacer más fácil el entendimiento de la relación entre distancia y diferencia de latitudes.
Respuesta
a) Como en ambas ciudades el Sol culmina a la misma hora entonces la diferencia de tiempos es $\Delta t = 0$ y la diferencia de *longitudes geográficas* es

$$\Delta l = \Delta t \times 15 \tag{1.19}$$

lo cual significa que la diferencia es

$$\Delta l = 0. \tag{1.20}$$

b) La *declinación* aproximada del Sol es cero grados ($\delta = 0$) cuando está en el cenit de Quito. Entonces, la *altura* (a) a la que se ve el Sol durante su *culminación* en San Andros, y la *latitud* de San Andros (ϕ) suman 90°, como se muestra en la Figura 1.21.

$$a + \phi = 90^\circ. \tag{1.21}$$

Entonces, la *latitud* de San Andros es

$$\phi = 90^\circ - a \tag{1.22}$$

sustituyendo el valor de a resulta que

$$\phi = \ 90^\circ \ - \ 65^\circ \ = \ 25^\circ \tag{1.23}$$

que es un valor aproximado de la *latitud* de San Andros.

1.11.4. Diferencia de longitudes geográficas

La ciudad de Ensenada, Baja California, está a una *longitud geográfica* aproximada de 116° Oeste mientras la ciudad de Puebla, Puebla, está en una *longitud* aproximada de 98° Oeste.
a) ¿En cuál de estas dos ciudades culmina primero la estrella Sirio?
b) ¿Qué diferencia de tiempo hay entre las dos culminaciones?

Respuesta

a) Como la Tierra gira de Oeste a Este las estrellas aparentemente se mueven de Este a Oeste. Debido a esto, una estrella culmina primero en el sitio que está más al Este. En el caso de las dos ciudades arriba mencionadas, Puebla está más al Este, entonces la estrella Sirio culmina antes en esta ciudad que en Ensenada.
b) Para saber la diferencia en los tiempos de *culminación*, vamos a calcular primero la diferencia en *longitudes geográficas*, a la cual denotaremos por Δl y es

$$\Delta l = l_E - l_P = 116^\circ - 98^\circ = 18^\circ \tag{1.24}$$

sustituyendo valores resulta que

$$\Delta t = \frac{18^\circ}{15\frac{\circ}{hora}} \tag{1.25}$$

lo cual resulta en

$$\Delta t = 1{,}2 \quad horas. \tag{1.26}$$

1.11.5. Máxima altura en Ensenada

La latitud máxima a la que llega el Sol es 23,5° Norte. La ciudad de Ensenada, Baja California está a 31,5° de latitud Norte. Debido a que Ensenada está a una *latitud* mayor a 23,5° Norte, entonces el Sol nunca está en el cenit de dicha ciudad.
a) ¿En qué fecha alcanza el Sol la mayor *altura* en Ensenada?
b) ¿Cuál es la mayor *altura* a que llega el Sol en Ensenada?
c) ¿Cuál es la menor *altura* que tiene el Sol durante su *culminación* en Ensenada?
Respuesta
a) La mayor *altura* que alcanza el Sol durante su *culminación* en Ensenada es el día del *solsticio* de verano que es cuando el Sol está más al Norte, lo cual ocurre entre el 21 y el 23 de Junio.
b) Durante la *culminación* del Sol, cuando su *declinación* es 23,5° Norte, su altura, su declinación y la *latitud* del lugar cumplen con

$$90^\circ = a + (\phi - \delta) \tag{1.27}$$

entonces la *altura* es

$$
\begin{aligned}
a &= 90^\circ - (31{,}9^\circ - 23{,}5^\circ) && (1.28)\\
a &= 90^\circ - 8{,}4^\circ = 81{,}6^\circ && (1.29)\\
& && (1.30)
\end{aligned}
$$

es decir, la mayor *altura* a la que se ve el Sol en Ensenada es de 81,6°.

c) La menor altura que tiene el Sol durante su *culminación* en Ensenada está dada por la Ecuación 1.27 donde en Este caso $\delta = -23{,}5$. Entonces la *altura* es

$$
\begin{aligned}
a &= 90^\circ - (31{,}9^\circ + 23{,}5^\circ) && (1.31)\\
a &= 90^\circ - 55{,}4^\circ = 34{,}6^\circ && (1.32)\\
& && (1.33)
\end{aligned}
$$

1.11.6. Diferencia de longitudes geográficas y culminación del Sol

En la ciudad de Chihuahua, Chihuahua el Sol culmina 36 minutos después que en Teotitlán del Camino, Oaxaca. Si la *longitud geográfica* de Teotitlán del Camino es 97° 04′ ¿Cuál es la *longitud geográfica* de Chihuahua?

Respuesta

La diferencia en el tiempo de las culminaciones es 36 *minutos*, el cual en horas es $\Delta\, t = \frac{36}{60} = 0{,}6^h$. Ahora vamos a calcular que ángulo rota la Tierra en ese tiempo, que es

$$\Delta l = \Delta t \times 15 \qquad (1.34)$$

lo cual resulta ser

$$
\begin{aligned}
\Delta l &= 0{,}6 \times 15 && (1.35)\\
\Delta l &= 9^\circ. && (1.36)\\
& && (1.37)
\end{aligned}
$$

Como la *longitud* de Teotitlán es 97° 04′ (que es donde el Sol culmina 36 minutos antes que en Chihuahua) entonces la *longitud* en Chihuahua es

$$l_c = (97^\circ\ 04') + \Delta l \qquad (1.38)$$

lo cual es igual a

$$l_c = 106^\circ\ 04'. \qquad (1.39)$$

1.11.7. Diferencia de latitudes en Teotihuacán y Catorce

El 18 de Mayo el Sol está en el cenit en Teotihuacán. Ese mismo día un asta bandera de 5 m en la ciudad de Catorce, San Luis Potosí, produce una sombra de 35 cm durante la *culminación* del Sol en esta última ciudad. ¿Cuál es la diferencia de *latitudes* entre Teotihuacán y Catorce?

Respuesta

Como la sombra en la ciudad Catorce es de 35 cm entones podemos calcular el ángulo en la parte superior del tríangulo de la Figura 1.3. Ese ángulo es igual al ángulo α que se forma en el centro de la Tierra entre las rectas radiales hacia los dos sitios en cuestión. Es decir, el ángulo α es igual a la diferencia de *latitudes*, la cual calculamos de

$$tan \ \ \alpha = \frac{l_s}{l_a} \tag{1.40}$$

donde l_s es la *longitud* de la sombra durante la *culminación* en la ciudad Catorce y l_a es la *longitud* del asta bandera. Entonces el ángulo es

$$\alpha \ = \ arctan(\frac{l_s}{l_a}) \tag{1.41}$$

donde *arc tan* es la función inversa a la función trigonométrica *tangente*.
Como l_s está dada en centímetros y l_a en metros, transformamos los 35 cm a metros que es 0,35 m. Sustituyendo los valores de las *longitudes* tenemos que

$$\frac{l_s}{l_a} = \frac{0{,}35}{5} \tag{1.42}$$

y aplicando la función *arctan* al resultado tenemos el ángulo, que es

$$\alpha = 4^\circ. \tag{1.43}$$

1.11.8. Diferencias en tiempos de culminaciones en Mérida y Greenwich

La longitud geográfica de la ciudad de Mérida, Yucatán, es de aproximadamente 90° al Oeste de Greenwich.

a) ¿Cuántas horas después de haber culminado en Greenwich el Sol culmina en Mérida?

b) Cuando en Greenwich es mediodía ¿qué tiempo del día es en Mérida, mañana, tarde ó noche?

Nota: La *longitud* de Mérida no es en realidad de 90° Para la pregunta de este ejercicio (y considerando la distancia a Greenwich) usamos Este valor aproximado para ilustrar la posición en la que se ve el Sol en dos lugares diferentes, lo cual está relacionado con la diferencia en la hora del día en cada uno de ellos.

Respuesta

a) Para saber la diferencia de tiempo (en horas) primero calculamos la diferencia en *longitudes geográficas*, la cual es

$$\Delta l = l_M - 0^\circ = 90^\circ \tag{1.44}$$

de esa diferencia calculamos ahora la diferencia en tiempos que es

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{15} \tag{1.45}$$

sustituyendo valores, dicha diferencia resulta ser

$$\Delta t = \frac{90^\circ}{\frac{15^\circ}{1^h}} = 6 \; horas. \tag{1.46}$$

b) De acuerdo al resultado del inciso a) en Mérida el Sol está en *culminación* 6 horas después que en Greenwich. Entonces, cuando el Sol está sobre el *meridiano de Greenwich* en Mérida el Sol apenas está apareciendo en el horizonte Este, es decir, en Mérida está amaneciendo y la respuesta es "de mañana".

1.11.9. Medición del radio terrestre por el método de Eratóstenes.

En el año 230 a.c. Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra. Eratóstenes se dió cuenta que en el *solsticio* de verano en la ciudad de la antigua Siena (hoy Assuan) en Egipto, al mediodía la luz del Sol llegaba directamente al fondo de un pozo de agua. Esto significa que en dicho lugar el Sol estaba en el cenit y por eso no producía sombra. Recordó que un poco más al Norte, en Alejandría también durante el *solsticio de verano*, la situación era diferente ya que un obelisco sí producía sombra al mediodía. Es decir, en Alejandría a la misma hora, el Sol no estaba en el cenit.

Eratóstenes, explicó lo anterior en un escenario en el que la Tierra es redonda y el Sol está muy lejos por lo que los rayos solares llegan paralelos entre sí. El obelisco y su sombra son los catetos de un triángulo (Figura 1.3). Al medir el ángulo del vértice superior de dicho triángulo en la Figura 1.3 encontró que era de 7,5°.

Eratóstenes sabía que Alejandría se encontraba casi en el mismo *meridiano* que Siena y conocía la distancia (d) entre estas ciudades (aproximadamente $d = 800$ km). Con los datos anteriores calcula el radio terrestre.

Respuesta

De la Figura 1.3 podemos ver claramente que uno de los lados es la distancia entre los dos sitios y que el ángulo α es opuesto a Este lado.
Para ese caso tenemos que hay una relación entre la fracción de la circunferencia y el ángulo

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{d}{C} \tag{1.47}$$

donde C es la circunferencia, entonces,

$$C = d\,\frac{360^\circ}{\alpha^\circ}. \tag{1.48}$$

Sustituyendo valores resulta que

$$C = 800 \text{ km}\,\frac{360^\circ}{7{,}5^\circ} \tag{1.49}$$

es decir

$$C = 38400{,}0 \text{ km} \tag{1.50}$$

y como la circunferencia se relaciona al radio por

$$C = 2\,\pi\,R \tag{1.51}$$

entonces el radio es

$$R = \frac{C}{2\,\pi} \tag{1.52}$$

el cual resulta ser de

$$R = 6112 \text{ km.} \tag{1.53}$$

Este valor del radio terrestre se aproxima mucho al valor que se considera correcto en la actualidad. Una vez que conoces el radio de la Tierra puedes calcular la circunferencia de la Tierra. También puedes calcular la superficie de la Tierra.

1.11.10. Medición de la sombra de un objeto durante la culminación del Sol

La hora de la *culminación* se puede estimar como se explicó en la Sección 1.10.2. Sin embargo, tenemos que hacer notar dos puntos importantes:
1.- Ese método no es la única forma de hacerlo.
2.- No es necesario hacer una medición precisamente durante la *culminación*.

Para ejemplificar los dos puntos anteriores veamos una forma en la que se puede medir la extensión de la sombra durante la *culminación* sin haber hecho medidas a esa hora.

Lo que requieres es haber trazado la línea Este-Oeste y entonces puedes medir la longitud que tendría la sombra aún cuando no hagas mediciones en el preciso momento de la culminación.

Primero tienes que identificar el punto medio de la línea Este-Oeste. Recuerda que dibujaste un arco y trazaste cruces en los puntos de interssección del arco y la línea Este-Oeste. A la mitad de esas cruces está el punto medio de la línea Este-Oeste. Lo único que tienes que hacer es medir la distancia entre el punto medio de la línea Este-Oeste y el punto en el que está la base del tubo. Esa es la longitud mínima que tendría la sombra.

1.11.11. Medición del radio terrestre cuando el Sol no está en el cenit de un lugar

Supongamos que conocemos la distancia (d) entre dos lugares. Si en ambos sitios durante la *culminación* del Sol los objetos producen sombra tenemos un caso como el que se representa en la Figura 1.4. En ese caso, el ángulo entre las líneas radiales a los dos sitios se calcula de la siguiente manera: Primero tenemos que aclarar que el ángulo en el vértice del objeto vertical en cada uno de los sitios es el ángulo entre el sitio en el que el Sol está en el cenit (en su *culminación*) y dicho sitio en el que no está en el cenit (ángulo α_1). Esto también es válido para el otro sitio en el que el Sol no está en el cenit (el ángulo es α_2).
a) ¿Se puede medir el radio terrestre usando las longitudes de estas dos sombras?

b) Si la respuesta en **a)** es afirmativa ¿cómo mides el radio terrestre en Este caso?
Respuesta
a) Sí, sí se puede medir el radio ya que no necesitamos saber la distancia entre los dos sitios con sombra y el sitio en el que el Sol sí está en el cenit durante su *culminación*. Lo que en realidad necesitamos es la distancia entre los dos sitios con sombra y el ángulo entre las líneas radiales a estos dos sitios.
b) Ese ángulo es igual a la diferencia de los dos ángulos anteriores, es decir

$$\alpha \;=\; \alpha_2 \;-\; \alpha_1 \tag{1.54}$$

usando α calculamos el radio a partir de las Ecuaciónes 1.47 y 1.52.

Este método se puede aplicar a cualquier par de mediciones de la sombra. Es decir, no se requiere que en alguno de ellos el Sol esté en el cenit durante su *culminación*.

1.11.12. Medición del radio de la Tierra con mediciones de la sombra a distintas longitudes terrestres

Para poder medir el radio terrestres ¿se pueden usar mediciones de la sombra en dos sitios que no estén en la misma *longitud geográfica*?
Respuesta
En la Figura 1.3 se muestran sitios en la misma *longitud geográfica* pero en realidad las únicas condiciones que se deben cumplir es que las mediciones se hagan el mismo día y que en cada sitio se hagan durante la *culminación*.

En el caso en el que en uno de los sitios el Sol está en el cenit tampoco es necesario que los dos sitios estén en la misma *longitud geográfica*. También, en Este caso las dos condiciones suficientes son que el Sol esté en *culminación* durante la medición en cada uno de los sitios y que las mediciónes se hagan el mismo día.

1.11.13. Culminación del Sol en dos ciudades

En la ciudad de Coyamé, Chihuahua el Sol culmina 28 minutos después que en la ciudad de Chachapa, Puebla. Un día que el Sol está en el cenit en Chachapa, un asta bandera de 6 m de altura en Coyamé produce una sombra de 1,1 m durante la *culminación*. Si las *coordenadas geográficas* de Chachapa son:

$\phi = 19{,}045°$ y $l = 98{,}093°$

calcula las coordenadas de Coyamé, en grados y fracciones de grado (con tres decimales) ó en grados y minutos.
Respuesta
Las coordenadas geográficas de Chachapa son:

$\phi = 19{,}045°$ y $l = 98{,}093°$

que en grados y minutos las podemos aproximar a

$\phi = 19°\ 3'$ y $l = 98°\ 6'$

La diferencia de latitudes la encontramos a partir del ángulo α. Este ángulo lo determinanos con base en la altura del asta ($6m$) y la extensión de la sombra ($108\ cm$), es decir

$$tan\ \alpha \ = \ \frac{1{,}1}{6{,}0} \tag{1.55}$$

lo cual da un ángulo

$$\alpha \ = \ 10{,}389° \tag{1.56}$$

que en grados y minutos es

$$\alpha \ = \ 10°\ 23'. \tag{1.57}$$

Entonces, la *latitud* de Coyamé expresada en grados y fracciones de grado es

$$\phi_c \ = \ (19{,}045° \ + \ 10{,}389°) = 29{,}434° \tag{1.58}$$

y para expresarla en grados y minutos hacemos la siguiente suma

$$\phi_c \ = \ (19°\ 3') \ + \ (10°\ 23') \tag{1.59}$$

que resulta en

$$\phi_c \ = \ 29°\ 26'. \tag{1.60}$$

Por otro lado, la diferencia de *longitudes geográficas* la calculamos a partir de la diferencia en las culminaciones, la cual es 28^m ó bien 0,46°.

$$\Delta\ l \ = \ 0{,}46° \ \times \ 15 = 7° \tag{1.61}$$

entonces la *longitud* de Coyamé es

$$l_c \ = \ 7° \ + \ (98°\ 6') \tag{1.62}$$
$$l_c \ = \ 105°\ 6'. \tag{1.63}$$

1.11.14. Altura del polo Norte Celeste

Si una persona está en un lugar a *latitud* $l \ = \ 20°$
a) ¿Cuál es la *altura* del Polo Norte para dicho observador?
b)¿Cuál es el *acimut* del Polo Norte para Este observador?
c)¿Cambián la *altura* y el *acimut* del polo Celeste durante la noche para dicho observador?
d)¿Cambián la *altura* y el *acimut* a lo largo del año?
Respuesta
a) La *altura* del polo Norte Celeste es de 20°.
b) El *acimut* es de 0°.
c) No, la *altura* y el *acimut* del polo Norte Celeste no cambian durante la noche.
d) No, la *altura* y el *acimut* del polo Norte Celeste no cambian a lo largo del año.

1.11.15. Relación entre día solar y día sideral

Si la Tierra da una vuelta alrededor del Sol en 365 días, calcula cuánto tiempo dura un it día sideral en it días solares.

Respuesta

Vamos a basarnos en la Figura 1.12. Tomamos como referencia la posición de la Tierra en el lado izquierdo de la figura (posición 1) . Entonces, el Sol y el punto Vernal están al lado derecho de la Tierra en el mismo *ángulo horario*. Vamos a suponer que para un observador en la Tierra tanto el Sol como el *Punto Vernal* están en *culminación* al mismo tiempo. Es decir, al *ángulo horario* de ambos es cero desde dicho lugar. En Este caso, empezamos a medir tanto el *tiempo sideral* como el *tiempo solar* al mismo momento, entonces la hora cero inicial es la misma tanto para el *tiempo sideral* como para el *tiempo solar*.
Ahora, vamos a ver qué pasa después de seis meses (posición de la Tierra denotada con el número 2) en esa posición de la Tierra en su órbita, vemos que el *Punto Vernal* sigue en el lado derecho respecto de la Tierra mientras que el Sol está en la parte superior de la Tierra. Entonces, para esa persona en un lugar en la Tierra son las 00:00 horas de tiempo solar, es decir, el Sol está pasando por el *meridiano* de dicho lugar. Por otro lado, el *Punto Vernal* está apareciendo en el horizonte del lado Este de la persona, es decir, son las 6:00 horas en el tiempo sideral. Esto significa que en 3 meses la hora sideral se retrasó 6 horas respecto de la hora solar.
Cuando la Tierra está en el extremo derecho de la Figura 1.12 (posición 3) la diferencia es de 12 horas entre la *hora solar* y la *hora sideral*. Finalmente, después de que la Tierra dió una vuelta completa alrededor del Sol, la diferencia entre el *tiempo solar* y el *tiempo sideral* es de 24 horas solares. Entonces el año sideral es menor a un año solar por 1 *día solar*, es decir es menor en $\frac{1}{365}$ que el *día solar*. Como el día tiene 24 horas tenemos que la diferencia entre *día solar* y *día sideral* es

$$(24 \ \ horas) \ \times \ \frac{1}{365} = 0{,}66 \ \ horas \tag{1.64}$$

lo cual en *minutos* es

$$60 \ \times \ \frac{24}{365} \ = \ 3{,}945 \ minutos \tag{1.65}$$

es decir,

$$24 \ h \ (solares) \ = \ 24 \ h \ \ 3{,}945 \ m \ (siderales). \tag{1.66}$$

1.11.16. Coordenadas de Sirio

Si la *ascención recta* (α) y la *declinación* (δ) de Sirio en el 2009 eran

$$\alpha \ = \ 6^h \ 45^m \ 34{,}0^s. \tag{1.67}$$

$$\delta \ = \ -16^\circ \ 43^m \ 47{,}1''. \tag{1.68}$$

Calcula α en *horas* y fracciones de *hora* y δ en *grados* y fracciones de *grado*.

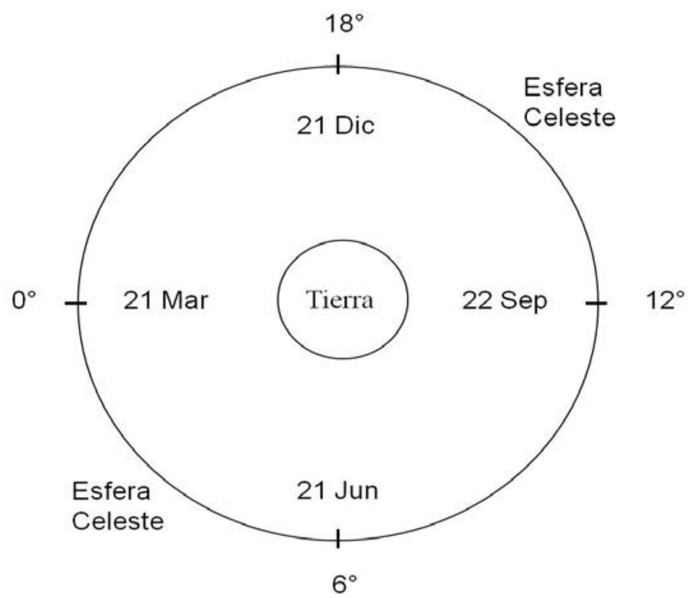

Figura 1.11: Representación de cuatro *ascenciones rectas* del Sol en la esfera Celeste. Cada una de las posiciones del Sol corresponde a un cambio de estación del año. Si el Sol está a 0° entonces durante la noche vemos las estrellas que están entre 6° y 18° grados de *ascención recta*. Si el Sol está a 12° entonces durante la noche vemos las estrellas cuya ascención recta es mayor a 18° grados y menor a 6°.

Respuesta

En Este ejemplo α está en *horas*, *minutos* (del arco) y *segundos* (del arco) pero también podemos usar la Ecuación A.13 entonces

$$\alpha = 6 + \frac{45}{60} + \frac{34{,}0}{3600}$$
$$\alpha = 6 + 0{,}75000 + 0{,}00944$$
$$\alpha = 6{,}75944^h.$$

La forma en la que se escribió la *declinación* de Sirio en la Ecuación 1.68 indica que es negativa por lo tanto, los *minutos* y los *segundos* también los escribimos con signo negativo.

$$\delta = -16 - \frac{43}{60} - \frac{47{,}1}{3600}$$
$$\delta = -16 - 0{,}71661 - 0{,}01308$$
$$\delta = -16{,}72969°.$$

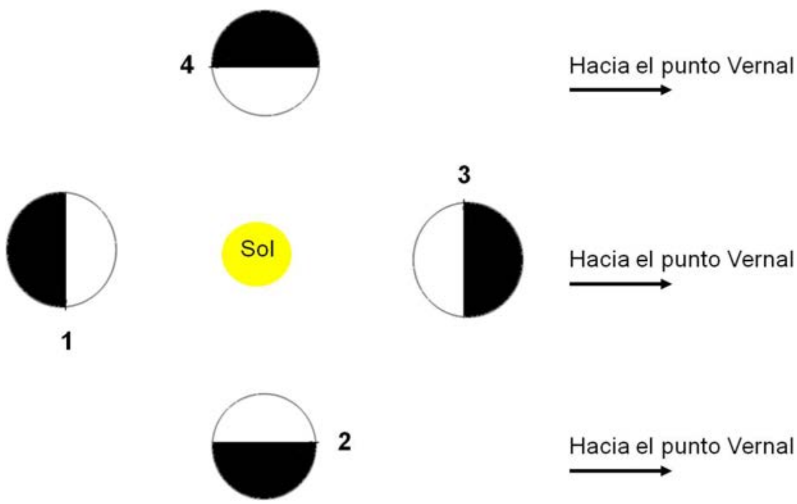

Figura 1.12: Representación de cuatro posiciones de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. En el lado derecho de la órbita sobre la esfera Celeste (es decir, muy lejos de la Tierra y el Sol) está el *Punto Vernal*.

1.11.17. Estrellas de día y de noche

A continuación tenemos una lista de estrellas y su ascención recta.

Estrella	Ascención Recta
1	1°
2	21°
3	11°
4	16°
5	5°

Cuando la *ascención recta* del Sol es

$$\alpha \;=\; 6^\circ. \tag{1.69}$$

a) ¿Cuáles de las estrellas listadas aparece durante el día?
b) ¿Cuáles aparecen durante la noche?
c) Si el Sol estuviera en $\alpha = 18^\circ$ ¿qué estrellas se verían de día?
d) Para el mismo caso de $\alpha = 18^\circ$ ¿qué estrellas se verían de noche?
Respuesta
a) Si el Sol está en $\alpha = 6^\circ$ la zona de la esfera Celeste que se ve durante el día es de $6^\circ - 6^\circ$ a $6^\circ + 6^\circ$ que es el intervalo de 0° a 12°. Las estrellas en ese rango de *ascensiones rectas* están sobre un observador en la Tierra pero debido a que el Sol ilumina la atmósfera terrestre ésta no permite ver a dichas estrellas. Las que se ven de día son 1, 3 y 5.
b) Las estrellas que se ven de noche son 2 y 4.
c) Para cuando el Sol está en $\alpha = 18^\circ$, el rango de Ascención recta que se ve de día es de $18^\circ - 6^\circ$ a $18^\circ + 6^\circ$, que es de 12° a 24°. Entonces de día se ven las estrellas 2 y 4.

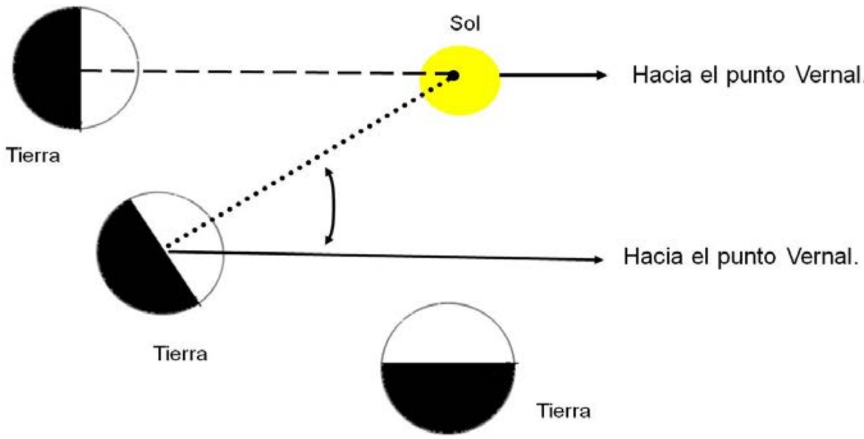

Figura 1.13: En esta figura se representan tres posiciones de la Tierra en su órbita. La línea a trazos denota la dirección entre un observador y el Sol. Para esa misma posición de la Tierra el *Punto Vernal* se ve en la misma dirección que el Sol. Las posiciones de la izquierda representan dos posiciones para dos días seguidos. La diferencia de posiciones está exagerada para ver que la Tierra gira un ángulo extra entre la *culminación* del *Punto Vernal* (línea contínua) y la del Sol (línea punteada). Es decir, el Sol pasa por el *meridiano* del observador después que el *Punto Vernal*. Esto claramente ilustra que el it día solar es mayor que el *día sideral*.

d) De noche se verían las estrellas 1, 3 y 5.

1.11.18. Distancia entre Monte Albán y Chichén Itzá

A continuación se dan las coordenadas de Monte Albán y de Chiche Itzá

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Monte Albán} \quad \phi & = & 17^\circ\ 3'\ 43'^{\,prime}\ N \\
l & = & 96^\circ\ 43'\ 18''\ W. \\
\text{Chichen Itzá} \ \ \phi & = & 20^\circ\ 40'\ 58''\ N \\
l & = & 88^\circ\ 34'\ 07''\ W.
\end{array}
$$

Basándonos en las coordenadas y usando una valor de 40000 km para la circunferencia de la Tierra podemos hacer un cálculo aproximado de la distancia entre estos dos sitios arqueológicos.
a) ¿Cuál es la distancia entre las ciudades?
b) Para un observador en Monte Albán en que dirección está Chichen Itzá?
Respuesta
a) La distancia entre las dos ciudades la vamos a encontrar con base en las diferencias entre las *latitudes* y las *longitudes*. La diferencia de *latitudes* la calculamos de la misma manera en la que se hace una suma. En el caso de la resta a una de las *latitudes* le ponemos signo negativo, entonces la diferencia es

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= (20^\circ\ 40'\ 58'') - (17^\circ\ 3'43'')\\ \Delta\phi &= 3^\circ\ 37'15'' = 3{,}6209^\circ\end{aligned}$$

y la diferencia entre *longitudes* la calculamos de la misma manera

$$\begin{aligned}\Delta l &= (88^\circ\ 34'\ 07'')\ -\ (96^\circ\ 43'\ 18'')\\ \Delta l &= -(8^\circ\ 9'\ 11'')\ =\ -\ 8{,}1531^\circ.\end{aligned}$$

Las diferencias de coordenadas dan la separación en dirección Norte-Sur ($\Delta\ \phi$) y la separación en dirección Este-Oeste (Δl). Estos ángulos son los catetos del ángulo que representa la distancia total. Entonces, el ángulo que separa los sitios en cuestión que es la hipotenusa de estas dos diferencias. Por lo tanto, el ángulo de separación entre los dos sitios es

$$\alpha = \sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta l)^2}$$

$$\alpha = 8{,}9210^\circ.$$

Usando Este ángulo calculamos la distancia como lo hicimos anteriormente, a partir de la fracción de circunferencia que representa Este ángulo como una fracción de 360°. La relación entre el ángulo y la distancia (Ecuación 1.8) conduce a

$$d = 40000 \times \frac{8{,}9210^\circ}{360^\circ}$$

lo cual resulta en

$$d = 991 \text{ km}.$$

1.11.19. Cálculo de altura y acimut a partir de ascención recta, declinación y ángulo horario

Las coordenadas de Sirio en el sistema ecuatorial son:

$\alpha = 6^h\ 45^m\ 34{,}0^s$
$\delta = -16^\circ\ 43'\ 47,11''$

Supongamos que tu estás en la ciudad de Puebla ($\phi\ = 19^\circ\ 02'\ 30''$ y $l = 98^\circ\ 11'\ 48''$) cuando el *ángulo horario* de Sirio en dicha ciudad es $s = 6^h$. Calcula la *altura* (a) y el *acimut* (A) de Sirio visto desde Puebla en ese momento.
Respuesta

Del Ejercicio 1.11.16 sabemos que las coordenadas de Sirio también las podemos escribir como

$$\alpha \;=\; 6{,}75944^h$$

$$\delta \;=\; -\,16{,}72969°.$$

También vamos a calcular la latitud de Puebla en grados y fracciones de grado.

$$\begin{aligned} \phi &= 19 + \frac{2}{60} + \frac{30}{3600} \\ &= 19 + 0{,}3833 + 0{,}0083 \\ &= 19{,}0416. \end{aligned}$$

Entonces, podemos usar las Ecuaciones 1.2, 1.3 y 1.4 . Vamos a ver la primera de ellas que es

$$sen\ A\ cos\ a \;=\; sen\ h\ cos\ \delta$$

sustituyendo los valores de α, δ, ϕ y h tenemos que

$$seno\ A\ cos\ a \;=\; sen\ (6°)\ cos\ (-16{,}72969°)$$

es decir

$$sen\ A\ cos\ a \;=\; 0{,}1001. \tag{1.70}$$

La siguiente ecuación es

$$cos\ A\ cos\ a \;=\; cos\ h\ cos\ \delta\ sen\ \phi \;-\; sen\ \delta\ cos\ \phi \tag{1.71}$$

de la cual, después de sustituir valores tenemos que

$$cos\ A\ cos\ a \;=\; 0{,}5878. \tag{1.72}$$

También, se usa la ecuación 1.7

$$sen\ a \;=\; cos\ h\ cos\ \delta\ cos\ \phi \;+\; sen\ \delta\ sen\ \phi \tag{1.73}$$

y sustituyendo los valores resulta que

$$sen\ a \;=\; 5{,}3889° \tag{1.74}$$

esta *altura* es pequeña, es decir, Sirio está casi sobre el horizonte.

El *acimut* (A) lo tenemos que calcular de la ecuación 1.70 y de la Ecuación 1.72 sustituyendo el valor de a. Despejando *sen* (A) en la Ecuación 1.70 tenemos que

$$sen\ A = \frac{0{,}1001}{cos\ a}$$

$$sen\ A = 0{,}9619$$

el cual corresponde a un ángulo

$$A = 74{,}1384°.$$

Es decir, las coordenadas horizontales de Sirio para ese momento son:

$$a = 5{,}3889°.$$

Este valor de la *latura* indica que Sirio está muy cerca del horizonte del observador dado.

$$A = 74{,}1384°.$$

Este *acimut* (recordar que está referido al Sur y se mide en la dirección en la que giran la manecillas del reloj) corresponde a una dirección en el lado Oeste del observador. Es decir, de acuerdo a los valores de a y A Sirio está cerca de ocultarse en el lado Oeste del observador.

Como el *acimut* calculado está referido al Sur, podemos usar los valores de la Tabla 1.5 para saber el *acimut* referido al Norte. De acuerdo a los valores mencionados el *acimut* referido al Norte es

$$A_N = 74{,}1384° + 180° = 254{,}1384°.$$

1.12. Ejercicios propuestos

1.12.1. Superficie terrestre

Se estima que $\frac{3}{5}$ de la superficie terrestre están cubiertas por agua. Calcula y escribe, en notación científica, la superficie de la Tierra (en *kilómetros cuadrados*) que está cubierta por agua.

1.12.2. Duración de la noche calculada a partir de la hora de salida del Sol

Supongamos que estamos en un sitio de la Tierra en el cual las noches y los días duran varias horas (es decir, no estamos en un sitio en donde el período de oscuridad puede ser mayor a un día). El mediodía se puede considerar como el momento intermedio entre la salida y la puesta de Sol. Si en un día dado en Greenwich, Inglaterra, el Sol salió a las 8:30 A.M. ¿ cuál es la duración de la noche?

1.12.3. Noche después del *Solsticio* de verano

A finales de junio, cuando acaba de pasar el *solsticio* de verano, ¿qué tan larga es la noche en el polo Sur?

1.12.4. Epoca de mayor tiempo con luz del Sol para un esquimal

Supongamos que un esquimal que vive a una *latitud* de 65° N requiere de luz del Sol para salir de cacería el mayor tiempo posible. ¿En qué época del año es más conveniente salir de cacería?
a) Entre el *solsticio* del 21 de diciembre y equinoccio del 21 de marzo .
b) Entre el equinoccio del 21 de septiembre y el *solsticio* del 21 de diciembre.
c) Entre el *solsticio* del 21 de junio y el equinoccio del 21 de septiembre.

1.12.5. Luz del Sol a las 11:00 P.M.

Son las 11 de la noche de un día de junio y vemos que el Sol se acaba de ocultar sobre el horizonte.

¿Dónde crees que podamos estar? **a)** Sidney, Australia **b)** La Paz, Bolivia **c)** Helsinki, Finlandia

1.12.6. Meses con noches más largas a 65° N

Tania vive en una ciudad que está ubicada a una latitud de 65° N. ¿Durante que periodo es más larga la noche para la ciudad de Tania? **a)** Noviembre-Diciembre **b)** Febrero-Marzo **c)** Mayo-Junio

1.12.7. Epoca del año con noche de 10 horas

Estando en el hemisferio Norte, si la duración de la noche es de 10 horas, estás en una época del año cercana al:
a) *Solsticio* de verano
b) Equinoccio de otoño
c) *Solsticio* de invierno

1.12.8. Ropa de un viajero que va de Chihuahua a Buenos Aires

Una persona que vive en Chihuahua sabe que durante los meses de agosto y julio hace mucho calor porque es verano. Va a viajar a Buenos Aires, Argentina en agosto y se pregunta cuál es la ropa más adecuada que debe llevar. ¿Qué le recomendarías?
a) Llevar chamarra, guantes, bufanda y gorra
b) Llevar solo un sweater ligero
c) Llevar ropa fresca

1.12.9. ¿Cuándo pueden ocurrir eclipses de Luna?

¿Puedes observar un eclipse de Luna cuando en el lugar en el que estás es mediodía? Explica por qué.

1.12.10. ¿En qué fase lunar ocurren eclipses de Luna?

Se sabe que los eclipses de Luna sólo ocurren cuando es Luna llena. Explica por qué.

1.12.11. Distancia equivalente a 1°

Calcula a cuantos *kilómetros* equivale 1° en *coordenadas geográficas*.

1.12.12. Longitud de Roma referida al Oeste

Las coordenadas de Roma, Italia, son

$$\phi = 41^\circ\ 53'\ 24{,}8''\ N$$

$$l = 12^\circ\ 29'\ 32{,}3''\ E$$

¿Cuál es la *longitud* de Roma referida al Oeste?

1.12.13. Identificar la dirección entre dos lugares por sus coordenadas

Una persona está perdida en un desierto el día 21 de Septiembre. Tiene un reloj con la hora de Greenwich. Para saber la hora en la que el Sol culmina en el lugar en el que está hace mediciones de la *longitud* de la sombra de un cactus alrededor del mediodía. También mide la extensión de la sombra durante la *culminación*.
La hora de la *culminación* es $5^h\ 30^m$. La altura del cactus es de 4 m y su sombra durante la *culminación* del Sol es de 2,5 m hacia el Norte.
Además tiene un libro con las coordenadas de varios lugares del mundo para identificar la dirección a la que debe dirigirse para llegar a alguna zona poblada y anota las siguientes

Abadi
$00^\circ\ 41'\ 25''\ N$
$122^\circ\ 29'\ 22''\ E$

Agua Dulce
$31^\circ\ 56'\ 00''\ N$
$113^\circ\ 07'\ 00''\ W$

Alga
$43^\circ\ 26'\ 42''\ N$
$77^\circ\ 10'\ 23''\ E$

La persona que está perdida tiene que elegir alguna de estas poblaciones y determinar en que dirección caminar. Tiene mayores probabilidades de sobrevivir si elige el lugar que está a una distancia menor a 100 km, ¿debe caminar hacia el Sur, al Norte, al Este o al Oeste?

1.12.14. Diferencia del paso del Sol entre Chichén Itzá y Teotihuacán

Las coordenadas de la Pirámide del Sol en Teotihuacán son:

$$\phi \;=\; 19^\circ \;\; 41' \;\; 32{,}60'' \; N$$

$$l \;=\; 98^\circ \;\; 50' \;\; 37{,}07'' \; O$$

Las coordenadas de la Pirámide el Castillo en Chichén Itzá son:

$$\phi \;=\; 20^\circ \; 40'58{,}00'' N$$

$$l \;=\; 88^\circ \; 34'07{,}27'' O$$

¿Con qué tiempo de diferencia culmina el Sol en estos dos sitios arqueológicos?

1.12.15. Ascención recta del Sol y culminación de otras estrellas

El 21 de diciembre de 2009 la *ascención recta* del Sol fue

$$\alpha \;=\; 17^h \; 57^m \; 49{,}0^s$$

a) Si la *ascención recta* de la estrella Vega fue $\alpha \;=\; 18^\circ \; 37' \; 15{,}6''$ ¿En qué lado del Sol estaba Vega, en el Este ó en el Oeste?
b) Si la *ascención recta* de Sirio fue

$$\alpha \;=\; 6^h \; 45^m \; 34{,}0^s$$

¿Cuántas horas después del Sol estaba Sirio en *Culminación*

1.12.16. Estrellas en culminación en el día y estrellas en culminación en la noche

La *ascención recta* de la estrella 1 es 14^h y la de la estrella 2 es 6^h
a) Si la estrella 1 está en *culminación* en un sitio ¿en qué zona del cielo, está la estrella 2, al Este ó el Oeste?

b) En esa época ¿la estrella 2 está en *culminación* durante el día ó la noche?

1.12.17. Culminación de estrellas a diferentes ángulos horarios

A continuación se listan algunas estrellas y sus coordenadas ecuatoriales (α y δ).

Estrellas		α	δ
Pléyades	$03^h\ 47{,}10^m$	+	$24°\ 07'\ 32''$
Betelgeuse	$05^h\ 55^m\ 10^s307$	+	$07°\ 24'\ 25\ 35''$
Sirio	$3^h\ 45^m\ 34{,}0^s$	-	$16°\ 43'\ 47{,}1''$

Si el Sol está en *ascención recta* de 12 h,
a) ¿Estas estrellas aparecen durante la noche ó durante el día?
b) ¿Cuál de estas estrellas está primero en *culminación* en la ciudad de Puebla, cuyas coodenadas geográficas son:

$$\phi \;=\; 19°\ 02'\ 30^{''} \tag{1.75}$$

$$l \;=\; 98°\ 11'\ 48^{''} \tag{1.76}$$

c) ¿Qué estrella culmina al último?

1.12.18. Relación entre ángulo cenital y altura

Demuestra que el *ángulo cenital* (z) y la *altura* (h) cumplen que $z + h = 90°$

1.12.19. Trayectoria del Sol al amanecer

¿En qué latitud geográfica tienes que estar para que veas salir al Sol en ángulo recto respecto al horizonte?

1.12.20. Trayectoria inclinada del Sol al amanecer visto desde Chihuahua

Juan vive en Chihuahua, al amanecer observa que el Sol se va moviendo trazando una trayectoria inclinada respecto al horizonte, ¿a qué se debe esto?

1.12.21. Trayectoria de la Luna al salir en el horizonte

Una persona ve salir la Luna y toma fotografías de su trayectoria sobre el horizonte, dicha trayectoria está inclinada hacia el Sur. En las fotografías el ángulo entre una línea perpendicular al horizonte y la trayectoria de la Luna resulta ser de 58°. Con Este dato, ¿en qué lugar crees que se encuentra la persona? a) Buenos Aires b) Nueva York, c) Ensenada, Baja California.

1.12.22. Trayectorias de las estrellas vistas desde el polo Norte

¿Cómo ve una persona en el polo Norte las trayectorias de las estrellas durante una noche? Compáralas con las trayectorias que se muestran en las Figuras **??**, **??** y **??**.

1.12.23. Altura de la estrella polar

En 2009 las coordenadas de la Estrella Polar fueron $\alpha = 02^h\, 43^m\, 05{,}1^s$ y $\delta = 89^h\, 18'\, 17{,}9''$ Supongamos que la Estrella Polar está en *culminación* para un observador que está a una *latitud geográfica* de 20° cuando la *ascención recta* del Sol es 0°.
a) ¿Cuál es el *acimut* de la estrella polar para dicho observador en ese momento?
b) ¿A qué *altura* ve dicho observador la estrella polar?

1.12.24. Altura del Sol en dos lugares

Moscú está a una *latitud geográfica* aproximada de 56° Norte y *longitud* 322,9840° Oeste.
a) ¿Cuál es la máxima *altura* a la que está el Sol durante su *culminación* en dicha ciudad?
b) Cuando en Greenwich el Sol está en *culminación* ¿qué tiempo del día es en Moscú: mañana, tarde ó noche?

1.12.25. Culminación de dos estrellas

La *ascención recta* de Sirio es

$$\alpha_S \;=\; 6^h\; 45^m\; 34{,}0^s \tag{1.77}$$

y la *ascención recta* de Betelgeuse (la segunda estrella más brillante de la constelación de Orión) es

$$\alpha_B \;=\; 5^h\; 55^m\; 41{,}2^s \tag{1.78}$$

a) ¿Cuál de estas dos estrellas pasa primero por el *meridiano* de Puebla? (es decir está en *culminación* en dicha ciudad)
b) ¿Cuánto tiempo después la segunda de ellas está en *culminación* en Puebla?

1.12.26. Transformación de coordenadas ecuatoriales a horizontales para estrellas en culminación

Si una estrella está en *culminación* entonces su *ángulo horario* (h) es $h = 0$ y el *acimut* (A) puede tomar solo valor 0° ó 180°. En ese caso las Ecuaciones 1.11.19, 1.71 y 1.7 se simplifican. Encuentra las expresiones simplificadas de estas ecuaciones para Este caso.

1.12.27. Límite de declinación de estrellas visibles a latitud ϕ

¿Cuál es la mínima *latitud* en la que se puede ver una estrella con declinación $\delta = 60°$?

1.12.28. Declinación, altura y latitud

Cuando una estrella atraviesa el *meridiano* en su posición más alta por encima del plano horizontal se dice que está en su *culminación* superior. Vamos a suponer que para un observador en el hemisferio Norte una estrella en su *culminación* superior se encuentra al Norte del cenit de dicho observador. ¿Cómo se relacionan (para Este momento) la *declinación* de dicha estrella, la *latitud* del lugar y la altura de la estrella?

1.12.29. Inclinación de Neptuno

La inclinación del ecuador de Neptuno, respecto a la eclíptica es de 29.5°. ¿Cuál es la máxima *latitud* Sur a la que llega directamente la luz del Sol a lo largo de un año de Neptuno?
a) A una *latitud* de 29.5°
b) A una *latitud* de 59.0°
c) A una *latitud* de 60.5°

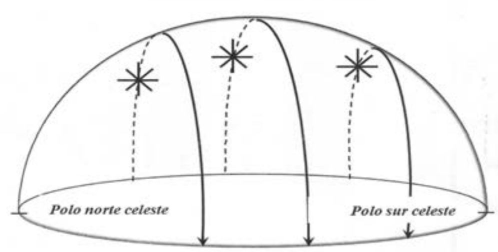

Figura 1.14: Movimiento diurno de las estrellas para una persona que está en Quito, Ecuador (0° de latitud). Las líneas con flechas indican la trayectoria de las estrellas durante una noche. El *plano horizontal* de Quito es *paralelo* al *Eje Polar*. Debido a eso las estrellas salen en el lado Este siguiendo una trayectoria perpendicular a dicho plano y se ocultan en el lado Oste también en dirección perpendicular al plano, como lo muestran las flechas.

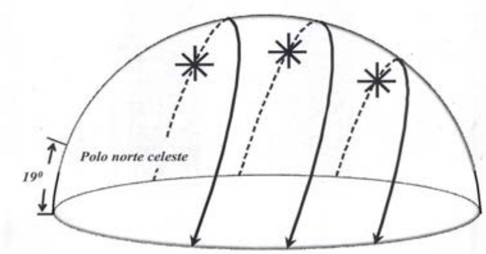

Figura 1.15: Trayectorias de las estrellas como las ve un observador ubicado en la ciudad de Puebla, México, a 19° de la latitud Norte. En ese plano las estrellas salen en el Este siguiendo trayectorias inclinadas respecto de dicho plano. También en el Oeste las estrellas se ocultan siguiendo trayectorias inclinadas respecto del *plano horizontal*.

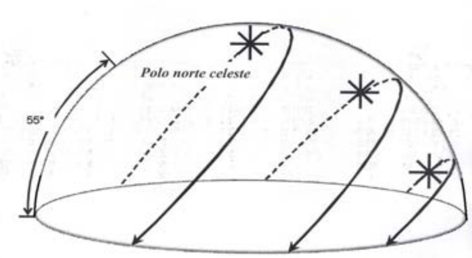

Figura 1.16: Trayectorias de las estrellas como las ve un observador en la ciudad de Moscú a 55° de *latitud Norte*. Para un observador en esta *latitud* las trayectorias son muy inclinadas respecto del *plano horizontal* del observador.

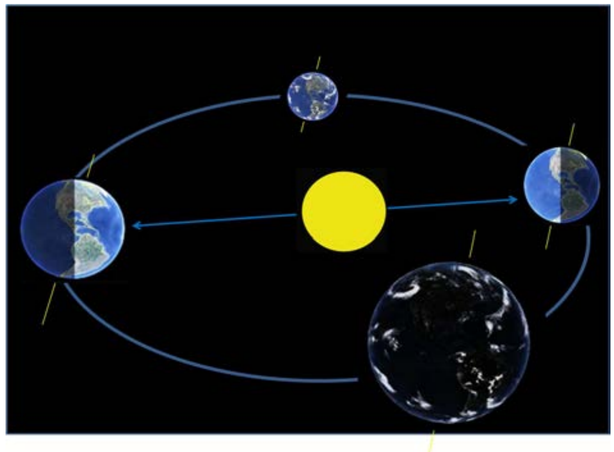

Figura 1.17: En esta figura se muestra esquemáticamente la Tierra en varias posiciones de su órbita. Con una línea recta se denota su eje de rotación, dicho eje tiene la misma inclinación en todas las posiciones de la órbita. La posición del lado izquierdo corresponde al *solsticio* de verano en la que el Sol ilumina más el hemisferio Norte que el Sur. En esa época vemos al Sol más al Norte. Se puede ver que una zona alrededor del polo Norte siempre está iluminada a pesar de que la Tierra rota sobre su eje. Es decir, en esa zona no hay noches obscuras durante esa época. En otras latitudes el Sol se oculta permitiendo que oscurezca. Durante el día la única estrella que se ve es el Sol pero en el cielo hay otras estrellas que no las vemos porque la luz del Sol ilumina la atmósfera terrestre. Visto desde la Tierra el Sol cambia su posición de un día a otro en relación a las estrellas que en ese momento no vemos de día. Debido a su cambio de posición el Sol traza una línea imaginaria sobre la *esfera celeste*, a dicha línea se le llama *eclíptica*. La órbita de la Tierra alrededor del Sol está en el plano de la *eclíptica*.

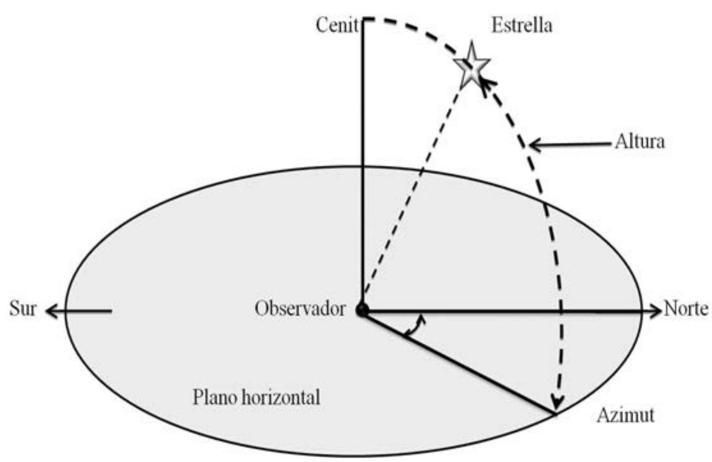

Figura 1.18: Coordenadas horizontales, *acimut*, h (A) y *altura* (h). El *acimut* de una estrella se mide sobre el *plano horizontal* desde el punto Norte en dicho plano, como se indica en esta figura, hasta el punto en el que se intersectan el círculo vertical de la estrella y el horizonte. La altura se mide desde el *plano horizontal* hasta la estrella sobre el *círculo vertical*.

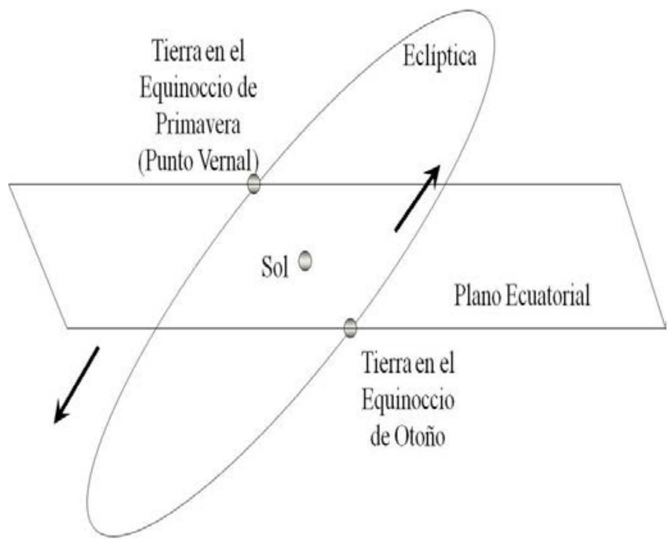

Figura 1.19: El *Ecuador* de la Tierra no es *paralelo* al *plano de la eclíptica* (en el que la Tierra gira alrededor del Sol). El ángulo que se forma entre el *plano ecuatorial* y el *plano de la eclíptica* es de 23.5°. En esta figura exageramos la inclinación de la *eclíptica* para hacer más esquemática la diferencia entre el plano ecuatorial y las posiciones de la Tierra en su órbita. El eje de rotación es perpendicular al *Plano Ecuatorial* entonces cuando la Tierra está en el lado derecho le da más luz del Sol al hemisferio Sur y cuando está del lado izquierdo le da más luz al hemisferio Norte. En esta figura tenemos en el centro al Sol, visto desde la Tierra el Sol se ve en el Sur cuando la Tierra está por encima del *plano ecuatorial*, lo cual ocurre después del *equinoccio de otoño*, hasta el *equinoccio de primavera*. Ese trayecto de su órbita está en el lado derecho de la Figura 1.17

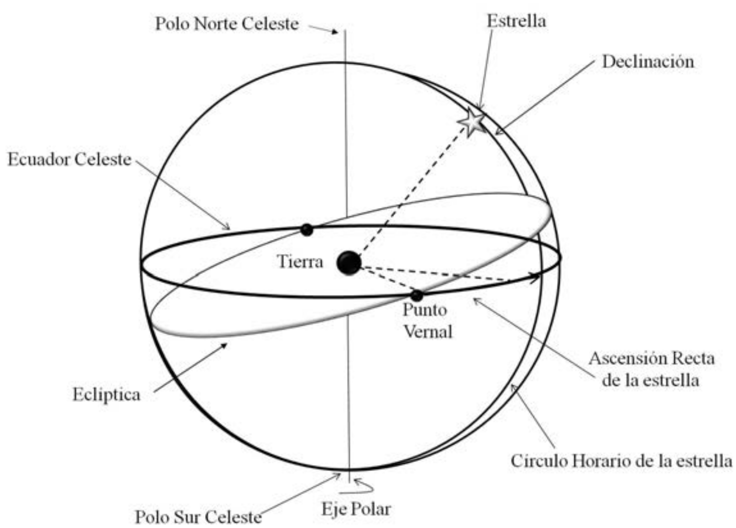

Figura 1.20: En esta figura se representa a la Tierra en el centro de la esfera Celeste. La línea vertical es la extensión del *eje polar*, la línea gruesa denota al Ecuador Celeste, el cual es perpendicular al *eje polar*. Sobre el Ecuador Celeste hay otra referencia que es el *Punto Vernal*. A partir del *Punto Vernal* se mide la *ascención recta* como lo indica la flecha sobre el Ecuador Celeste. La *declinación* se mide a lo largo del *círculo horario*, desde el Ecuador hasta la estrella.

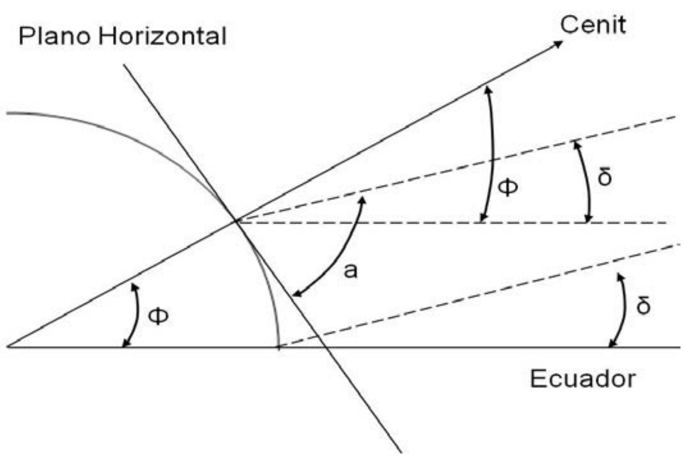

Figura 1.21: Representación de la relación entre la *declinación*, la *latitud* en la que está un observador y la *altura* en la que dicho observador ve una estrella que durante su *culminación* está al Sur del *cenit*.

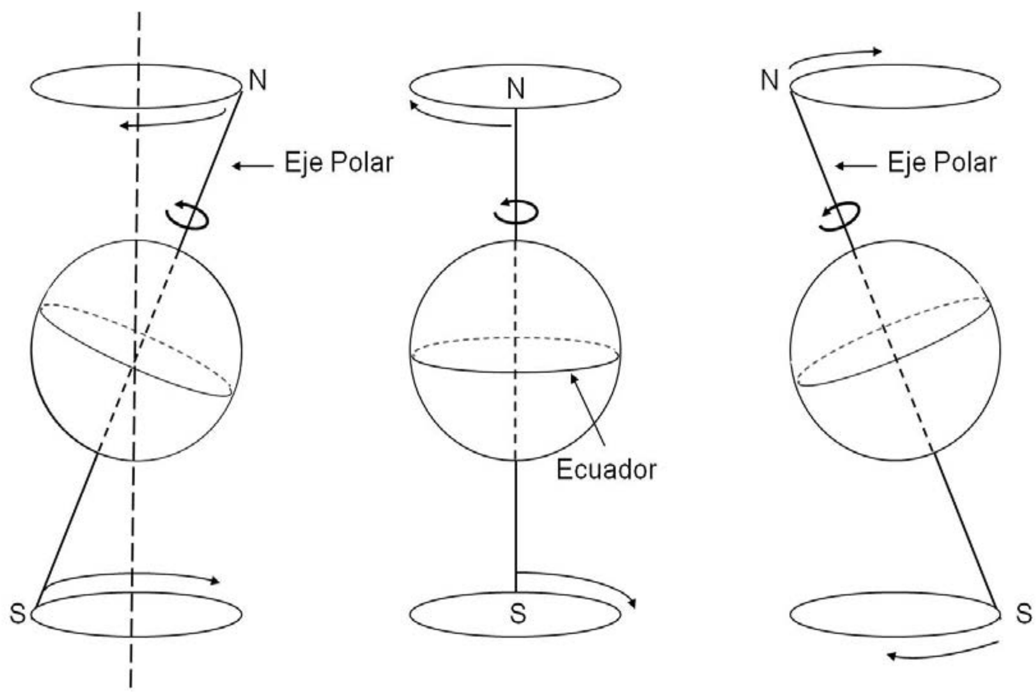

Figura 1.22: En esta figura se representan tres posiciones del eje de rotación de la Tierra. Es el movimiento del eje de rotación similar al de un trompo cuando "baila". En cada una de las posiciones, el eje apunta a diferentes puntos de la $esferaceleste$ y traza una circunferencia completa en aproximadamente 26, 000 años, por eso la diferencia entre la dirección a la que apunta el *polo celeste* en un año y el siguiente es pequeña. La estrella polar ó "polaris" ha estado cerca del polo Norte Celeste por varios cientos de años.

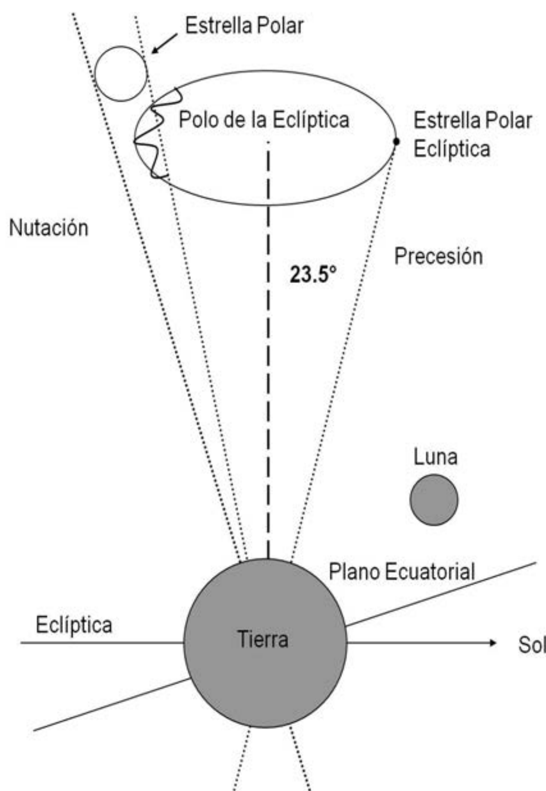

Figura 1.23: El movimiento de *nutación* se representa con la línea ondulada sobre la trayectoria del movimiento de *precesión* y de *nutación*. La línea horizontal representa a la *eclíptica*, la línea inclinada que cruza la Tierra representa al *plano ecuatorial*. La línea a trazos es perpendicular a la *eclíptica* y apunta hacia el *polo de la eclíptica*. La línea punteada del lado derecho representa la dirección a la que actualmente apunta el *Eje Polar*. La elipse (vista así por la proyección) representa la trayectoria del *Eje Polar* debido a la *precesión* a lo largo de 26000 años. Las líneas punteadas de la izquierda representan las posiciones extremas del *eje polar* debido al movimiento de *nutación*.

Capítulo 2

Algunos conceptos básicos de Astrofísica

2.1. Ondas periódicas

Casi toda la información que se tiene de los objetos celestes se ha obtenido a partir de la luz que nos llega de ellos. Por eso, es muy importante conocer algunos conceptos relacionados con la luz y que se usan en Astronomía.

Onda periódica: es una onda que se repite en intervalos de tiempo iguales. La luz que vemos se transmite como *ondas periódicas*. Dicha luz, así como los rayos gamma, los $rayos\ X$ y las *ondas* de radio son *ondas electromagnéticas*, las cuales son parte del *espectro electromagnético*. Las *ondas* y en particular las *ondas electromagnéticas* pueden experimentar diversos fenómenos dentro de los que está el $efecto\ Doppler$. Para poder explicarlo vamos a ver a continuación, algunas definiciones referentes a las $ondas$.

Longitud de onda: es la distancia sobre la cual una *onda periódica* se repite. Generalmente se usa la distancia entre los máximos de la *onda* para medir su longitud. La *longitud de onda* se denota por la letra griega λ.

Frecuencia: es el número de *ondas* que se producen por intervalo de tiempo. Para medir la $frecuencia\ f$ generalmente se usa un intervalo de tiempo de un segundo. Es decir, la $frecuencia$ es el número de veces que se repite una onda en un segundo.

Período: es el tiempo (T) que tarda una onda en repetirse. Es decir, el *período* es el inverso de la $frecuencia$, lo cual se expresa como

$$f = \frac{1}{T}. \tag{2.1}$$

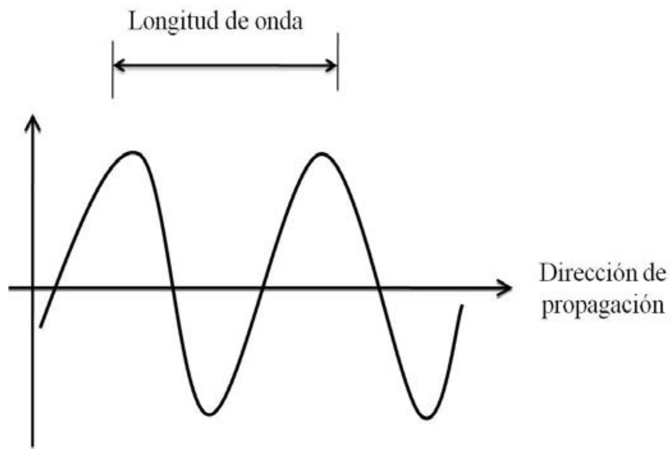

Figura 2.1: Representación de una onda, la línea horizontal superior representa la longitud de onda.

En el caso de las *ondas electromagnéticas* la *frecuencia* y la *longitud de onda* están relacionadas por

$$c = \lambda f. \tag{2.2}$$

donde c es la velocidad de la luz.

Las *ondas* transportan energía sin que necesariamente haya propagación de material en la dirección que viaja la onda. Una perturbación produce variaciones en las condiciones físicas locales y estas variaciones son las que se propagan. Por ejemplo, en un estadio de futbol, cuando los espectadores hacen la llamada ”ola”, lo que se propaga es la condición de que las personas están de pie pero las personas no tienen que correr en la dirección en la que se mueve la ”ola”.

2.1.1. Ondas sonoras

El *sonido* es un fenómeno en el que se producen *ondas preside ón* en un medio, como resultado de alguna perturbación. Estas *ondas* consisten en regiones con mayor densidad y en regiones con menor densidad que se van propagando dentro del medio. La velocidad del *sonido* depende de la temperatura y de la densidad del medio en el que se propaga. Por ejemplo, en el aire a una temperatura de 20° C su velocidad es de 344 $\frac{m}{s}$ (ó sea aproximadamente 1240 $\frac{km}{h}$), en el agua es de 1490 $\frac{m}{s}$, en el aluminio es de 6400 $\frac{m}{s}$. En el vacío no hay *sonido* debido a que se requiere de un material sobre el que se propaguen las perturbaciones.

2.1.2. Ondas electromagnéticas

Los campos eléctrico y magnético se propagan en el espacio a la velocidad de la luz y variando simultánea y periódicamente. A esta forma en la que se propaga la energía electromagnética se le llama *ondas electromagnéticas*, dichas ondas no requieren de un medio para propagarse (a diferencia de las ondas sonoras). Un ejemplo de *ondas electromagnéticas* es la luz que captan nuestros ojos.

2.1.3. El espectro electromagnético

Es el conjunto de *ondas electromagnéticas* y se le conoce como espectro electromagnético, éste va desde rayos gamma hasta *ondas* de radio, la *longitud de onda* de un rayo gamma es menor a 1 *Amstrong* (10^{-10} m) mientras que las *ondas* de radio pueden ser mayores a varios *kilómetros*. De todo este rango nosotros solo captamos, con nuestros ojos, las que están entre 3000 y 7000 *Amstrongs*. Podemos captar otras *ondas* de manera indirecta, es decir con instrumentos que sí pueden captarlas. Por ejemplo, las *ondas* de radio de FM son aproximadamente de 1 m de longitud y aunque ni las vemos, ni las oímos directamente, los radios y los televisores sí las captan y después transforman la información a sonido o imágenes.

2.1.4. Propiedades de las ondas

Las *ondas* puede experimentar diferentes fenómenos dentro de los que están los siguientes:

Refracción: es el cambio de dirección que experimenta una *onda* al pasar de un medio a otro. Cada color tiene un índice de refracción. El ángulo que se desvía una *onda* al entrar a un medio depende del *índice de refracción* del medio y de la *longitud de onda*.

Dispersión: es la separación de *ondas* de distinta *longitud de onda* al atravesar un material.

Difracción: es el cambio de dirección de las *ondas* cuando encuentran un obstáculo.

Interferencia: es la superposición de dos o más *ondas*. Cuando las *ondas* son de la misma $frecuencia$ y se suman en fase de tal manera que coinciden los máximos con los máximos y los mínimos con los mínimos se dice que la *interferencia* es completamente constructiva.

2.2. Escala de placa

La *escala de placa* es un parámetro muy empleado en Astronomía observacional. Se llama *escala de placa* porque, antes del empleo de CCDs y cámaras digitales, la imagen captada por los telescopios se registraba en placas fotográficas. La *escala de placa* es la relación entre el ángulo (α) que subtiende un objeto observado y el tamaño (s) que tiene este objeto en la placa fotográfica (es decir en el plano focal) entonces

$$s = f\,\alpha \tag{2.3}$$

donde f es la distancia focal del telescopio. La *escala de placa* se puede expresar en *segundos de arco* sobre *milímetro* a partir de

$$f = \frac{s}{\alpha} \tag{2.4}$$

Si en la ecuación anterior f y s están ambas en las mismas unidades entonces el ángulo α está en radianes.

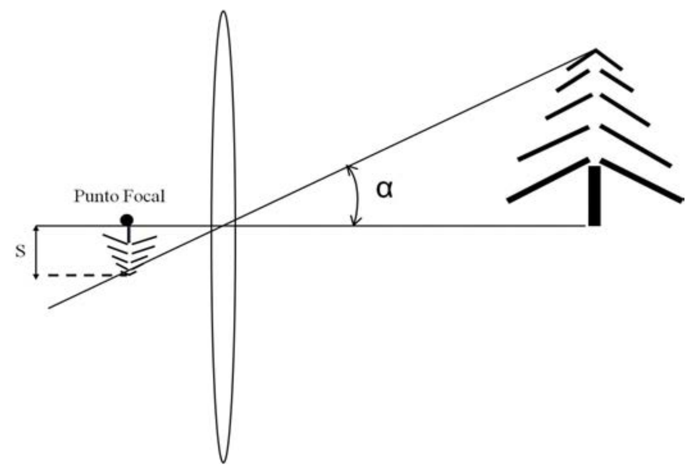

Figura 2.2: Imagen de un árbol en una placa fotográfica después de pasar la luz procedente del árbol por una lente. En la placa el árbol tiene un tamaño s mientras que el ángulo que subtiende visto desde la lente es α.

2.3. Resolución angular

La resolución angular es la capacidad de distinguir dos estrellas cercanas y no verlas como una sola. En un telescopio la resolución angular es

$$\phi \approx \frac{\lambda}{D} \tag{2.5}$$

donde λ es la *longitud de onda* y D el diámetro del objetivo óptico del telescopio. La *resolución* es mejor entre más pequeño sea el valor de ϕ. Es decir, entre menor sea ϕ vamos a poder distinguir estrellas que estén más cercanas entre sí. Como un telescopio lo podemos usar para ver otros objetos (además de estrellas) podemos decir que entre menor sea ϕ vamos a poder distinguir más detalles de los objetos que observemos. En la práctica la *resolución* está limitada por la influencia de la atmósfera y en la actualidad la mejor *resolución* que se puede alcanzar, en observaciones hechas en la superficie terrestre, es de varias décimas de *segundo de arco*.

Un *segundo de arco* es un ángulo muy pequeño, es el ángulo que subtiende una moneda de 1 *cm* de diámetro vista desde un lugar a 2 *km* de distancia. Con este ejemplo podemos darnos cuenta que los telescopios nos ayudan a ver detalles de objetos muy distantes.

2.4. Efecto Doppler

: El efecto Doppler es el cambio de $frecuencia$ que ve un observador cuando un objeto, que emite una *onda*, está en movimiento. Si el objeto se aleja del observador, la $frecuencia$ de la onda disminuye, si el objeto se acerca la $frecuencia$ aumenta.

Como la $frecuencia$ y la *longitud de onda* están relacionadas por la Ecuación 2.2 podemos darnos cuenta que, en términos de la *longitud de onda* ocurre que, si el objeto se aleja del observador la *longitud de onda* aumenta. Debido a que la *longitud de onda* del rojo es mayor que la de los otros colores entonces, se dice que cuando un objeto se aleja, su luz tiene un corrimiento o desplazamiento al rojo, si el objeto se acerca su luz tiene un corrimiento al azul.

Vamos a expresar la *longitud de onda* que ve el observador cuando el objeto emisor está en reposo como λ_0. La *longitud de onda* que ve el observador cuando el emisor se mueve a velocidad v es λ y la diferencia entre esta longitud y λ_0 la denotamos por $\Delta\ \lambda = \lambda$ - λ_0, la cual se relaciona con la velocidad en la siguiente ecuación

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}, \quad para \quad v << c \tag{2.6}$$

donde en este caso se consideró una onda electromagnética y entonces c es la velocidad de la luz ($300,000\frac{km}{s}$). Si en lugar de una onda electromagnética se tratara de una onda sonora entonces en lugar de la velocidad de la luz deberíamos usar la velocidad del sonido. Por lo que mencionamos en el parrafo anterior, sabemos que cuando el objeto se aleja se cumple que $\lambda > \lambda_0$ entonces $\lambda - \lambda_0 > 0$, es decir $\Delta\ \lambda > 0$. Entonces, podemos ver de la ecuación 1.6 que, cuando el objeto se aleja su velocidad es positiva y cuando se acerca es negativa.

Un ejemplo muy claro del efecto Doppler ocurre cuando escuchamos la sirena de un vehículo que pasa cerca de nosotros. Cuando el vehículo se acerca escuchamos un tono más agudo porque la longitud de onda se hace más corta, como si se comprimiera. En cambio, cuando el vehículo se aleja, la longitud de onda se alarga. El sonido se hace mas grave y el cambio del tono de la sirena nos indica que el vehículo se dirigió hacia donde estabamos y después se alejó.

2.4.1. Efecto Doppler debido a un sistema de muchas partículas

Vamos a suponer que un observador ve un sistema de muchas partículas y que todas las partículas **emiten** en la misma frecuencia. En dicho sistema cada partícula tiene una dirección. Para entender como serían las frecuencias que **captaría** el observador de este conjunto de partículas primero veamos el caso de 4 partículas (Figura 2.3a).

Con líneas punteadas se representan la velocidad y direccín de la partícula que se aleja del observador, con líneas a trazos la velocidad de la partícula que se acerca y con líneas contínuas las velocidades de partículas que se mueven perpendicularmente a las dos anteriores y que no producen *desplazamiento Doppler*. En la Figura 2.3b graficamos el *desplazamiento Doppler* (Δv) contra el número de partículas. Vemos que solo una partícula tiene desplazamiento hacia el rojo (velocidad positiva). Otra partícula tiene desplazamiento al azul (velocidad negativa). Dos partículas tienen *desplazamiento Doppler* de cero ($\Delta\ v = 0$). La cantidad máxima de partículas se encuentra en *desplazamiento Doppler* cero, es decir en velocidad cero respecto a la línea visual del observador

Si ahora incluimos más partículas en el sistema (Figura 2.4a) vamos a tener una situación similar pero la gráfica del número de partículas contra el *desplazamiento Doppler* es más suave (Figura 2.4b).

Línea Espectral: es la emisión de partículas que producen *ondas* de la misma $frecuencia$, se le conoce como *línea espectral* por que en un espectro (ver siguiente secciń) se ve como una línea, ya sea blanca u obscura. Las *líneas espectrales* se producen por transiciones entre estados de energía ligados. Sin embargo, debido a que las partículas tienen diferentes velocidades y direcciónes un observador no las ve todas a la misma $frecuencia$ sino como en la Figura 2.4b.

2.5. Espectro

Un *espectro* es una representación de la distribución de la intensidad de la luz, procedente de un objeto, en función de la *longitud de onda*. Un espectro lo podemos obtener haciendo pasar la luz por un prisma. En Astronomía se emplean prismas y rejillas (o la composición de ambos) para obtener los espectros de objetos celestes. Lo primero que podemos ver es que no todos los colores tienen la misma intensidad. Cuando vemos las estrellas a simple vista nos podemos dar cuenta que algunas son rojas mientras que otras son azules. Si pasáramos su luz por un prisma nos daríamos cuenta de que efectivamente un color es más intenso que los otros.

Los espectros muestran, además de diferentes intensidades en los colores, también algunas líneas más brillantes y otras líneas más oscuras que son precisamente las llamadas *líneas espectrales*.

2.6. Tipo espectral

En el Universo hay una gran diversidad de estrellas, las más masivas tienen hasta cien veces la masa del Sol, mientras que, las menos masivas tienen solo unas cuantas décimas de la masa del Sol. También el rango de temperaturas varía mucho, desde estrellas con temperaturas de 50,000 grados $Kelvin$ (que se abrevia K) en su superficie hasta estrellas con temperaturas de 1000 K, también en su superficie.

La temperatura de una estrella determina los estados de ionización de los diferentes elementos químicos que tiene. Los niveles energéticos en los que están los iones de una estrella dada determinan las $frecuencias$ de las *líneas espectrales* de emisión ó absorbción de dicha estrella, los cuales en general son diferentes para diferentes temperaturas. Entonces, estudiando las líneas espectrales de una estrella podemos conocer su temperatura.

Las estrellas se clasifican con respecto a su espectro en siete clases principales (O, B, A, F, G, K y M). Las estrellas de clase O tienen las temperaturas más altas mientras que las de clase M las más bajas. Dentro de cada clase hay estrellas con diferentes temperaturas. Por eso, cada clase se divide en subclases denotadas por un número después de la letra. Por ejemplo, las temperaturas de las estrellas de clase O3 son de 35,000 K mientras que las temperaturas de las estrellas O9 son de 20,000K. Las estrellas de la clase M8 son de 2500 K. El Sol tiene una temperatura de aproximadamente 5700 K y su clase espectral es G2.

2.7. Estados de la materia

La materia está constituida por partículas. En un sistema de partículas la forma en que éstas se agregan entre sí determina el estado de dicho sistema, el cual puede ser sólido, líquido ó gaseoso.

Un Sistema Sólido tiene forma y volumen constantes. Las partículas están unidas entre sí y solo tienen movimientos de vibración alrededor de posiciones medias. Por ello, las sustancias sólidas tienen tamaño y forma definidos.

Un Sistema Líquido no tiene forma fija pero sí volumen. En presencia de una fuerza un líquido puede tomar la forma de un recipiente.

Un Sistema Gaseoso no tiene forma ni volumen fijos. Debido a la gran movilidad de las partículas el sistema puede expandirse hasta ocupar todo el volumen del recipiente que los contiene.

Plasma se le considera el cuarto estado de la materia. Un plasma es un gas de partículas cargadas, el cual consiste de un igual número de cargas positivas y negativas. Debido a esto, un plasma se comporta como eléctricamente neutro en escalas grandes. Sin embargo es un buen conductor, similar a un metal. Los focos de Neón que se usan en las casas y en el alumbrado público, contienen plasma. La luz que emiten dichos artefactos se origina porque el plasma conduce corriente que les provee de energía a la que después liberan como luz. En la vida diaria los estados de la materia, con los que estamos mas familiarizados son el estado líquido y el sólido. Sin embargo, en los objetos celestes estos estados no son los que predominan. Un gran porcentaje de los objetos celestes están constituidos por gas y plasma.

2.8. Movimiento de las partículas y conceptos de temperatura y presión

Los átomos y las moléculas que conforman un sistema tienen una energía que los hace estar en constante movimiento. A dicha energía del sistema se le ha asociado una variable a la que llamamos *temperatura*.

El constante movimiento interno en un gas, produce choques de las partículas contra las paredes del recipiente que lo contiene. La *presión* de un gas hacia las paredes de dicho recipiente es resultado de la cantidad y la velocidad de los choques entre las partículas. Es decir, dicha *presión* depende de la cantidad de partículas así como de su energía cinética.

2.9. Temperatura absoluta

La temperatura se puede medir en diferentes escalas. La escala absoluta de temperatura se basa en el movimiento de las partículas de un sistema. El valor cero en esta escala corresponde al estado en el que las partículas de un sistema no se mueven. Es decir, el cero corresponde al estado de un sistema en el que las partículas están en reposo.

2.10. Gas ideal

Un gas ideal se considera formado por partículas puntuales, en el que estas ni se atraen ni se repelen entre sí. Además, en los choques entre dichas partículas no se pierde energía, es decir, en un choque una partícula puede ceder energía a otra, pero la energía del sistema se conserva. Los gases reales que más se aproximan al comportamiento del gas ideal son los gases monoatómicos en condiciones de baja presión y alta temperatura.

2.11. Densidad

Muchas veces hemos visto que algunos materiales como el metal y la madera tienen diferente peso aun cuando estos tienen el mismo volumen, para referirnos a ellos decimos que el primero es más pesado y el segundo es más ligero. Esta propiedad tiene que ver con la cantidad de masa que hay en el mismo volumen, llamada densidad. La densidad, ρ, de un cuerpo se define como la cantidad de masa por unidad de volumen, es decir

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{2.7}$$

donde m representa la masa del objeto y V su volumen. La densidad se expresa en $\frac{kg}{m^3}$. La ecuaciń anterior sĺo es válida para cuerpos homogéneos, es decir, que tienen la misma composiciń en todo el volumen. Aquellos cuerpos en donde la composición varía de un punto a otro, se llaman heterogéneos y en esos casos deja de ser válida la ecuación (2.7).

2.12. El albedo de un planeta

El termino *albedo*, denotado por A, depende de la capacidad de un cuerpo para reflejar la luz. Los planetas de nuestro Sistema Solar no tienen luz propia, pero la reflejan y la absorben. El brillo de un planeta depende de su distancia al Sol y del *albedo* de su superficie. Si el *albedo* de un cuerpo es A, la fracción de radiación absorbida por el cuerpo es $(1 - A)$. Si el cuerpo está a una distancia r del Sol, el flujo de energía o luminosidad absorbida es

$$L_{abs} = \frac{R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \pi R^2}{r^2}(1 - A) \tag{2.8}$$

donde R es el radio del planeta, $R_\odot = 696 \times 10^3 km$, $T_\odot = 5800\ K$ son el radio y la *temperatura efectiva* del Sol, respectivamente, y $\sigma = 567 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Suponiendo que el cuerpo rota lentamente, la radiación térmica es emitida principalmente por uno de los hemisferios del cuerpo y ésta se expresa como

$$L_{em} = 2\pi R^2 \sigma T^4 \tag{2.9}$$

donde T es la temperatura del cuerpo y $2\pi R^2$ es el área de un hemisferio.

2.13. Ejercicios con respuesta

2.13.1. Tono de la sirena de un vehículo en reposo y en movimiento

Un coche inicialmente en reposo, enciende una sirena y una persona la escucha a lo lejos. La sirena suena a una frecuencia de 587,33 Hz que corresponde al tono musical $''re''$. Entonces el vehículo empieza a moverse y alcanza una velocidad de 120 $\frac{km}{h}$ mientras se dirige hacia el lugar donde está la persona que escucha la sirena.

a) ¿Cuál es la *longitud de onda* del tono de la sirena?
b) Cuando el vehículo está en reposo ¿qué longitud de onda escucha la persona?
c) Cuando el vehículo alcanza la velocidad de 120 $\frac{km}{h}$ ¿en qué *longitud de onda* escucha el sonido de la sirena la persona en cuestión?
d) El vehículo pasa por el lugar donde está la persona y después se aleja de ella a 120 $\frac{km}{h}$ ¿En qué *longitud de onda* escucha la sirena?

Respuesta

a) La *longitud de onda* de la sirena la calculamos a partir de la ecuación que relaciona la *longitud de onda*, la *frecuencia* y la velocidad con que viaja la *onda* que en este caso es la velocidad del *sonido*,

$$s \ = \ \lambda \ \nu \tag{2.10}$$

donde s es la velocidad del *sonido*, λ es la *longitud de onda* y ν la *frecuencia*. De la Ecuación 2.10 tenemos que la *longitud de onda* del *sonido* que produce la sirena es

$$\lambda_\circ \ = \ \frac{s}{\nu}. \tag{2.11}$$

Entonces, sustituyendo valores tenemos que para un tono de 587,33 Hz, la *longitud de onda* es

$$\lambda_\circ \ = \ \frac{344{,}0}{587{,}33} \ = \ 0{,}59 \ m \tag{2.12}$$

que en centímetros es

$$\lambda_\circ \ = \ 59 \ cm. \tag{2.13}$$

b) Como el vehículo está en reposo respecto a la persona que la escucha es $\lambda_\circ$, que es $\lambda_\circ \ = \ 59 \ cm$.

c) Cuando el vehículo se dirige hacia la persona a una velocidad $\upsilon = 120 \frac{km}{h}$ la *longitud de onda* que escucha dicha persona (λ) debido al *efecto Doppler* depende del cociente entre la velocidad del vehículo y la velocidad del *sonido*, como lo expresa la siguiente ecuación.

$$\frac{\upsilon}{s} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_{\circ}} \tag{2.14}$$

donde $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_{\circ}$, con $\lambda_{\circ}$ la *longitud de onda* cuando el vehículo está en reposo respecto del observador y λ la *longitud de onda* cuando se mueve a velocidad υ. Sustituyendo tenemos que

$$\lambda = \frac{\upsilon \, \lambda_{\circ}}{s} + \lambda_{\circ} = \lambda_{\circ} \left(1 + \frac{\upsilon}{s}\right). \tag{2.15}$$

Como el vehículo se acerca a la persona entonces la velocidad es negativa (ver sección 2.4), es decir,

$$\lambda = 0{,}59 \; m \; (1 - \frac{33{,}33 \; \frac{m}{s}}{344 \; \frac{m}{s}}) \tag{2.16}$$

lo cual resulta en

$$\lambda = 53 \; cm. \tag{2.17}$$

d) Cuando el vehículo se aleja usamos la Ecuación 2.15 pero ahora con velocidad positiva. En ese caso, la *longitud de onda* es

$$\lambda = 0{,}59 \; m \; (1 + \frac{33{,}33 \; \frac{m}{s}}{344 \; \frac{m}{s}}) \tag{2.18}$$

debido a que el vehículo se aleja del observador ésta es mayor a la del reposo, como vimos en la sección **??**. Haciendo los cálculos, el valor de la *longitud de onda* observada resulta

$$\lambda = 65 \; cm. \tag{2.19}$$

2.13.2. Longitud de onda de la señal de una estación de radio

Una estación de radio transmite su señal a una *frecuencia* de 100 MHz. El radio de un vehículo capta dicha señal en un canal que tiene un rango de 100 $MHz \pm 10KHz$.

a) ¿A qué *longitud de onda* corresponde la frecuencia central?

b) Si el vehículo va a una velocidad de 80 $\frac{km}{h}$ mientras se acerca a la estación ¿en cuánto varía la *longitud de onda* cuando está en movimiento respecto a la *longitud de onda* en reposo? (Usa unidades que te den valores enteros).

c) ¿Es grande la variación calculada en el inciso b), para que la *longitud de onda* que le llega al coche (es decir, la onda con desplazamiento Doppler) sea mayor que las que puede recibir la banda del radio del vehículo?

Respuesta

a) La *longitud de onda* de una onda electromagnética depende de la velocidad de la luz y de la $frecuencia$, expresada como

$$c = \nu \lambda \tag{2.20}$$

donde c es la velocidad de la luz, λ la *longitud de onda* y ν la $frecuencia$ de la onda. Entonces la *longitud de onda* es

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \tag{2.21}$$

Ahora, transformamos los 100 MHz a Hz (s^{-1}) para poder hacer la división que aparece en la Ecuación 2.21. Sabemos que 1 $MHz = 10^6\ Hz$, entonces 100 $MHz = 10^2\ MHz = 10^2 \times 10^6\ Hz$. Es decir 100 $MHz = 10^8\ Hz = 10^8\ (\frac{1}{s})$. Por otro lado, sabemos que la velocidad de la luz es $c = 300,000\ \frac{km}{s} = 3 \times 10^5\ \frac{km}{s}$, lo cual en $\frac{m}{s}$ es

$$c = 3 \times 10^5 \left(\frac{km}{s}\right) = 3 \times 10^5 \times 10^3 \left(\frac{m}{s}\right) \tag{2.22}$$

$$c = 3 \times 10^8 \left(\frac{m}{s}\right). \tag{2.23}$$

Sustituyendo valores tenemos que

$$\lambda_\circ = \frac{3 \times 10^8\ \frac{m}{s}}{10^8\ \frac{1}{s}} \tag{2.24}$$

de lo cual resulta que

$$\lambda_\circ = 3\ m. \tag{2.25}$$

b) Cuando el observador se mueve respecto a la fuente que emite las *ondas* tenemos un movimiento relativo entre observador y la fuente. Dicho movimiento relativo es equivalente a que el objeto emisor se mueva (como en los casos c) y d) del ejercicio del tono de la sirena de un vehículo en movimiento escuchado por una persona en reposo). Sabemos que cuando hay un movimiento relativo entre emisor y observador a una velocidad υ podemos usar la ecuación

$$\lambda = \lambda_\circ \left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right) \tag{2.26}$$

donde c es la velocidad de la luz y υ la velocidad del observador. Pasamos esta velocidad a $\frac{m}{s}$, lo cual resulta en

$$80\ \frac{km}{h} = \frac{80,0}{3,6}\ \frac{m}{s} = 22,2\ \frac{m}{s}. \tag{2.27}$$

Sustituyendo valores, resulta que

$$\lambda = 3\ m \left(1 - \frac{22,2\ \frac{m}{s}}{3 \times 10^8\ \frac{m}{s}}\right) \tag{2.28}$$

$$\lambda \ = \ 3\ m\ (1\ -\ 7{,}4\ \times\ 10^{-8}). \tag{2.29}$$

Como $1\ m\ =\ 10^9\ nm$, es decir un *metro* es igual a 10^9 *nanómetros*, entonces la variación en la *longitud de onda* es

$$\lambda \ = \ 3\ m\ \times\ 7{,}4 \times 10^{-8} \tag{2.30}$$

$$\lambda \ = \ 2{,}2\ \times\ 10^{-7}\ m. \tag{2.31}$$

A esta cantidad la multiplicamos por $1\ =\ \frac{10^9\ nm}{1\ m}$ para saber a cuantos *nanómetros* equivale

$$\lambda \ = \ 2{,}2\ \times\ 10^{-7}\ (m)\ \times\ 10^9 \left(\frac{nm}{m}\right) \tag{2.32}$$

en *nanómetros* es

$$\lambda \ = \ 220\ nm. \tag{2.33}$$

c) Para saber si la *longitud de onda* es mayor al ancho de banda del radio vamos a calcular las *longitudes de onda* máxima y mínima de la banda del radio. Primero, vamos a expresar la $frecuencia$ inicial de la banda, que es la central *(100 MHz)* menos *10 KHz* y la $frecuencia$ final de la banda es

$$\nu_i \ = \ 100\ MHz\ -\ 10\ KHz \tag{2.34}$$

$$\nu_f \ = \ 100\ MHz\ +\ 10\ KHz \tag{2.35}$$

como

$$1\ KHz\ =\ 10^{-3} MHz \tag{2.36}$$

entonces

$$\nu_i \ = \ 100\ MHz\ -\ 10\ \times\ 10^{-3}\ MHz \tag{2.37}$$

$$\nu_i \ = \ 99{,}999\ MHz \tag{2.38}$$

$$\nu_f \ = \ 100\ MHz\ +\ 10\ \times\ 10^{-3}\ MHz \tag{2.39}$$

$$\nu_f \ = \ 100{,}001\ MHz \tag{2.40}$$

y la *longitud de onda* máxima de la banda que capta el radio es

$$\lambda_M \ = \ \frac{3\ \times\ 10^8\ \frac{m}{s}}{9{,}9999\ \times\ 10^7\ \frac{1}{s}} \tag{2.41}$$

que expresada en *metros* resulta

$$\lambda_M \;=\; 3{,}00003\ m \tag{2.42}$$

y la *longitud de onda* mínima de la banda es

$$\lambda_m \;=\; \frac{3\ \times\ 10^8\ \frac{m}{s}}{1{,}00001\ \times\ 10^8\ \frac{1}{s}} \tag{2.43}$$

$$\lambda_m \;=\; 2{,}99997\ m. \tag{2.44}$$

Con los valores anteriores tenemos el rango de *longitudes de onda* que va de 2,99997 m a 3,00003 m. De acuerdo al resultado del inciso **b)** el *desplazamiento Doppler* debido al movimiento del vehículo es de $2{,}2\ \times\ 10^{-7}\ m$. Si a la *longitud de onda* central le sumamos este valor, el resultado queda dentro del rango de *longitudes de onda* que capta el radio. Por lo tanto, el *desplazamiento Doppler* por el movimiento del vehículo no afecta la recepción de dicha estación.

2.13.3. Molécula de CO en el medio interestelar

La molécula de CO es muy abundante en el medio entre las estrellas (medio interestelar) y emite, dentro de otras frecuencias a 115 GHz.
Nota: Vamos a usar esta frecuencia en números redondos aunque la frecuencia real en la que emite el CO tiene varios decimales. Esto nos va a permitir visualizar mejor que los cambios por desplazamiento Doppler pueden ser muy pequeños en relación a la longitud de onda en reposo y que dicho corrimiento, nos puede dar información importante sobre el movimiento de los objetos.
a) ¿A qué *longitud de onda* corresponde esa $frecuencia$?
b) Si una nube de CO en el medio interestelar se aleja de la Tierra a una velocidad de 50 $\frac{km}{s}$, ¿en qué *longitud de onda* registraríamos la señal que emitió a 115 GHz?
Respuesta
a) La *longitud de onda* es

$$\lambda_\circ \;=\; \frac{c}{\nu} \;=\; \frac{3\ \times\ 10^8\ \frac{m}{s}}{1{,}15\ \times\ 10^{11}\ \frac{1}{s}} \tag{2.45}$$

lo cual es

$$\lambda_\circ \;=\; 2{,}6\ mm. \tag{2.46}$$

b) La *longitud de onda* en la que registraríamos la señal es

$$\lambda \;=\; \lambda_\circ\ (1\ +\ \frac{v}{c}) \tag{2.47}$$

donde v es la velocidad con que se mueve la nube respecto al observador. Debido a que se aleja, entonces el signo de v es positivo, sustituyendo valores tenemos

$$\lambda \ = \ 2{,}6 \ mm \ (1 \ + \ \frac{5 \ \times \ 10^4 \ \frac{m}{s}}{3 \ \times \ 10^8 \frac{m}{s}}) \tag{2.48}$$

$$\lambda \ = \ 2{,}6004 \ mm. \tag{2.49}$$

2.13.4. Nube de plasma durante una explosión solar

Durante una explosión en el Sol se produce una nube de plasma que se mueve radialmente hacia fuera del Sol (en dirección hacia la Tierra) a una velocidad de 250 $\frac{km}{s}$. La nube tiene iones de Neón que emiten en una *longitud de onda* de 770 $\mathring{A}$. (En realidad la longitud de onda es mayor pero para ver el desplazamiento Doppler es más cómodo usar este valor).
a) ¿A qué frecuencia en Hz corresponde esa *longitud de onda*?
b) ¿A qué frecuencia en MHz corresponde esa *longitud de onda*?
c) ¿En qué *longitud de onda* se capta en la Tierra la emisión de los iones de Neón de la nube?
Respuesta
a) Para calcular la *frecuencia* en Hz primero calculamos la longitud de onda en metros a partir de la relación $1 \ m \ = \ 10^{10} \ \mathring{A}$, la cual usamos a continuación como $1 \ = \ \frac{10^{-10} \ m}{1 \ \mathring{A}}$

$$\lambda_\circ \ = \ 770 \ \mathring{A} \ = \ 770 \ (A) \ 10^{-10} \ \frac{m}{\mathring{A}} \tag{2.50}$$

$$\lambda_\circ \ = \ 7{,}7 \ \times \ 10^{-8} \ m \tag{2.51}$$

entonces, la *frecuencia* es

$$\nu \ = \ \frac{3 \ \times \ 10^8 \ \frac{m}{s}}{7{,}7 \ \times \ 10^{-8} \ m} \tag{2.52}$$

$$\nu \ = \ 3{,}9 \ \times \ 10^{15} Hz. \tag{2.53}$$

b) El resultado del inciso **a)** está en Hz, ahora lo calculamos en MHz

$$\nu \ = \ 3{,}9 \ \times \ 10^{15} (Hz) \ \times \ (\frac{1 \ MHz}{10^6 \ Hz}) \tag{2.54}$$

$$\nu \ = \ 3{,}9 \ \times \ 10^9 \ MHz. \tag{2.55}$$

c) La *longitud de onda* a la que se captará la señal es

$$\lambda \ = \ (1 \ - \ \frac{2{,}5 \ \times \ 10^5 \ \frac{m}{s}}{3{,}0 \ \times \ 10^8 \ \frac{m}{s}} \tag{2.56}$$

$$\lambda \ = \ 769{,}4 \ \mathring{A}. \tag{2.57}$$

2.13.5. Emisión en H α de una galaxia distante

Una galaxia se aleja de la nuestra (Vía Láctea) a una velocidad de 0.1 la velocidad de la luz. Si el Hidrógeno de dicha galaxia emite en la línea espectral Hα (6563 $\AA$)
a) ¿Cuál es la frecuencia en Hz de la línea espectral producida por la galaxia?
b) ¿En qué *longitud de onda* se registra en la Tierra esa línea?
Respuesta
a) Para saber la frecuencia primero pasamos la *longitud de onda* a *metros*

$$\lambda_\circ \ = \ 6563 \ A\AA \ \times \ \frac{1 \ m}{10^{10} \ (A\AA)} \tag{2.58}$$

$$\lambda_\circ \ = \ 6{,}563 \ \times \ 10^{-7} \ m \tag{2.59}$$

después calculamos la $frecuencia$ con $\upsilon \ = \ \frac{c}{\lambda_\circ}$, lo cual resulta

$$\upsilon \ = \ 4{,}6 \ \times \ 10^{14} \ Hz. \tag{2.60}$$

b) La *longitud de onda* que va a tener la señal por desplazamiento Doppler es

$$\lambda \ = \ \lambda_\circ \ (1 \ + \ \frac{v}{c}) \tag{2.61}$$

donde $v = 0.1 \times c$, es la velocidad de la galaxia, además v es positiva, entonces la velocidad la sustituimos con signo positivo

$$\lambda \ = \ \lambda_\circ \ (1 \ + \ \frac{0{,}1 \ c}{c}) \tag{2.62}$$

entonces, tenemos la *longitud de onda* en reposo multiplicada por un factor que nos va a dar la *longitud de onda* observada

$$\lambda \ = \ \lambda_\circ \ 1{,}1 \tag{2.63}$$

$$\lambda \ = \ 7219 \ \AA. \tag{2.64}$$

2.13.6. Densidad de una estrella variable

Una estrella varía de tamaño y cambia de un radio menor R_1 a uno mayor $R_2 = 1.1R_1$.

a)¿En qué porcentaje aumentó su volumen?

b)La densidad (ρ) promedio de una estrella se define como

$$\rho = \frac{M}{V}$$

donde M es la masa y V es el volumen. Suponiendo que la densidad es la misma en todo el volumen de la estrella y que la masa total de la estrella no cambia. ¿La densidad promedio aumenta o disminuye al aumentar el radio?

c)Calcula en que porcentaje cambiĺa densidad entre ρ_1 y ρ_2.

Respuestas

a)Si denotamos el volumen inicial de la estrella por V_1, entonces el volumen será

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3.$$

En el momento que la estrella cambia de radio, su volumen también cambia, es decir su volumen será

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{4}{3}\pi R_2^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(1.331)R_1^3. \end{aligned}$$

Ahora para determinar cual es el aumento del volumen hacemos un cociente entre los dos volumenes:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi(1.331)R_1^3\right)}{\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 1.331.$$

Es decir aumento en un 33.1 % más respecto al volumen inicial.

b) Partiendo de la definicińn y suponiendo que las masas son las mismas, la densidad para la estrella de radio R_1 es

$$\rho_1 = \frac{M}{V_1}.$$

Posteriormente la estrella cambia a un radio R_2 siendo su densidad

$$\rho_2 = \frac{M}{V_2} = \frac{M}{1.331V_1}.$$

Ahora comparamos las densidades ρ_1 y ρ_2:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{\left(\frac{M}{1.331V_1}\right)}{\left(\frac{M}{V_1}\right)} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{MV_1}{1.331MV_1} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 0.751. \end{aligned}$$

Es decir, al aumentar el radio de la estrella su densidad disminuyó. El cambio de la densidad fue aproximadamente en un 25 %.

2.13.7. Densidad de la Tierra

El radio de la Tierra es 6 378 km y su masa es 5.97×10^{24} kg.

a) ¿Cuál es la densidad promedio de la Tierra?

b) Si el radio de la Tierra se redujera a una tercera parte y su masa no cambiará, cuál sería su densidad?

c) Si el radio de la Tierra y su masa se redujera a una tercera parte, ¿su densidad sería la misma? ¿por qué?

Respuesta

a) La densidad de define como

$$\rho = \frac{m}{V},$$

donde m es la masa de la Tierra y $V = \frac{4}{3}\pi R_\oplus^3$ el volumen de la Tierra. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{M_\oplus}{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3} \\
\rho &= \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3} \\
\rho &= \frac{(3)(5.97 \times 10^{24}\ kg)}{4\pi(6378000\ m)^3} \\
\rho &= 5\,493.28\ \frac{kg}{m^3}.
\end{aligned}$$

b) Como el radio de la Tierra se reduce a una tercera parte, es decir, $R_\oplus = 2\,126\ km$ y su masa no cambia, se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3} \\
\rho &= \frac{(3)(5.97 \times 10^{24}\ kg)}{4\pi(2\,126\,000\ m)^3} \\
\rho &= 148\,318.71\ \frac{kg}{m^3}.
\end{aligned}$$

c) En este caso, la masa y el radio se reducen en una tercera parte, asi que sustituyendo se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3} \\
\rho &= \frac{(5.97\times 10^{24}\ kg)}{4\pi(2126000\ m)^3} \\
\rho &= 49\,439.57\ \frac{kg}{m^3}.
\end{aligned}$$

2.13.8. Densidad de Urano

Determina la densidad de Urano si su masa es 14 veces la de la Tierra y su radio es 4 veces el radio de la Tierra, siendo la masa de la Tierra de 5.97×10^{24} kg y su radio 6 378 km.

Respuesta

La densidad se define como

$$\rho = \frac{M}{V}, \tag{2.65}$$

donde M es la masa y V es el volumen del objeto. En este caso se sabe que $M_U = 14M_\oplus$ y $R_U = 4R_\oplus$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\rho_U &= \frac{M_U}{V_U} = \frac{3M_U}{4\pi R_U^3} \\
\rho_U &= \frac{42M_\oplus}{256\pi R_\oplus^3} \\
\rho_U &= \frac{21M_\oplus}{128\pi R_\oplus^3} \\
\rho_U &= \frac{21(5.97\times 10^{24}\ kg)}{128\pi(6.37\times 10^6\ m)} \\
\rho_U &= 1\,206.1\ \frac{kg}{m^3}.
\end{aligned}$$

2.14. Ejercicios Propuestos

2.14.1. Estimación del radio de próxima Centauri a partir del ángulo que subtiende

La estrella más cercana al sistema solar es Próxima Centauri y se encuentra a 4.28 años luz de distancia. Si vista desde la Tierra subtiende un ángulo de 0.76 segundos de arco. ¿Cuál es el radio de dicha estrella?

2.14.2. Ancho de banda de una antena en MHz y longitudes de onda de un avión

Unos estudiantes construyerón una antena que capta longitudes de onda en el rango de 40 cm a 60 cm y quieren detectar señales de un avión.
a) ¿Cuál es el ancho de banda de las $frecuencias$ (en MHz) que capta dicha antena?
b) El avión que quieren captar viaja a una velocidad de 900 $\frac{km}{h}$. Si el avión va acercándose a ellos mientras emite una señal a 500 MHz ¿captará la antena de los estudiantes la señal del avión?
c) Si el avión en lugar de acercarse se aleja de ellos, ¿captarán su señal?

2.14.3. Desplazamiento Doppler fuera de la banda del radio del ejercicio de la banda del radio del vehículo

¿A qué velocidad y en que dirección tendría que ir el vehículo del Ejercicio 2.13.2 para que la señal tuviera una *longitud de onda* mayor a la máxima de la banda del radio del vehículo?

2.14.4. Velocidad relativa entre Andrómeda y la Vía Láctea

Mediciones de la línea de $H\alpha$ en Andrómeda, que está a una distancia de 2 000 000 de años luz y que es la galaxia vecina a la Vía Láctea, dan una *longitud de onda* de $\lambda = 6560{,}5\AA$.

Vamos a considerar la longitud de onda en reposo de $H\alpha$, solo para hacer más claro el procedimiento, de $\lambda = 6563{,}0\AA$.
a) De acuerdo al valor observado de $H\alpha$, Andrómeda y la Vía Láctea ¿se están alejando o se están acercando?

b) ¿A qué velocidad ocurre lo anterior?

c) Si, de acuerdo a la respuesta del inciso **a)**, en un futuro va a ocurrir un evento sobresaliente entre Andrómeda y la Vía Láctea ¿qué evento será? y ¿dentro de cuánto tiempo ocurrirá?

2.14.5. Radar para medir velocidades de vehículos

En un ejemplo anterior vimos que una velocidad que se considera alta para un vehículo que capta una señal mientras viaja a 120 $\frac{km}{h}$ produce variaciones mas pequeñas respecto de la *longitud de onda* emitida.
Supongamos que quieres determinar la velocidad con que viaja un vehículo.

a) ¿Utilizarías una $frecuencia$ baja ó una alta para tener mayor precisión?

b) Si la $frecuencia$ fuera 10 KHz, ¿cuántos decimales de precisión necesitarías para poder distinguir una velocidad de 10 $\frac{km}{h}$?

2.14.6. Variación del radio de una estrella

Una estrella varía de tamaño y cambia de un radio menor R1 a uno mayor R2=1.1R1.

a) ¿En qué porcentaje aumentó su volumen?

b) La densidad, ρ, promedio de una estrella se define como

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{2.66}$$

donde M es la masa y V es el volumen. Suponiendo que la densidad es la misma en todo el volumen de la estrella y que la masa total de la estrella no cambia. ¿La densidad promedio aumenta o disminuye al aumentar el radio?
c) Calcula en que porcentaje cambio la densidad entre ρ_1 y ρ_2.

2.14.7. Densidad de Urano

Determina la densidad de Urano si su masa es 14 veces la de la Tierra y su radio es 4 veces el radio de la Tierra, siendo la masa de la Tierra de $5{,}97 \times 10^{24} kg$ y su radio ecuatorial 6378 km.

2.14.8. Albedo de Marte y su distancia al Sol

Suponiendo que el cuerpo rota rapidamente emitiendo aproximadamente el mismo flujo en todas partes de su superficie, la luminosidad emitida es

$$L_{em} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{2.67}$$

donde T es la temperatura del cuerpo y $4\pi\ R^2$ es el área superficial del planeta.

a) Si el planeta lo podemos considerar como un cuerpo negro, demuestra que su distancia al Sol está dada por

$$r = \sqrt{\frac{L_\odot(1-A)}{16\pi\sigma T^4}} \tag{2.68}$$

donde $L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 = 3{,}9 \times 10^2 6W$.

b) Suponiendo que Marte es un cuerpo negro, determina cuál es la distancia media, en unidades astronómicas, entre el Sol y Marte.

2.14.9. Albedo de un cuerpo y su distancia al Sol

Si el *albedo* de un cuerpo es A,
a) Demuestra que cuando el cuerpo celeste rota lentamente su distancia al Sol está dada por

$$r = \sqrt{\frac{L_{\odot}(1-A)}{16\pi\sigma T^4}}. \tag{2.69}$$

b) Vamos a suponer que observamos la parte de Mercurio iluminada por el Sol. Mercurio tiene un albedo esférico de 0.106 y su temperatura del lado iluminado es de 517 K. Suponiendo que Mercurio es un cuerpo negro, determina cuál es la distancia media, en unidades astronómicas, entre el Sol y Mercurio.

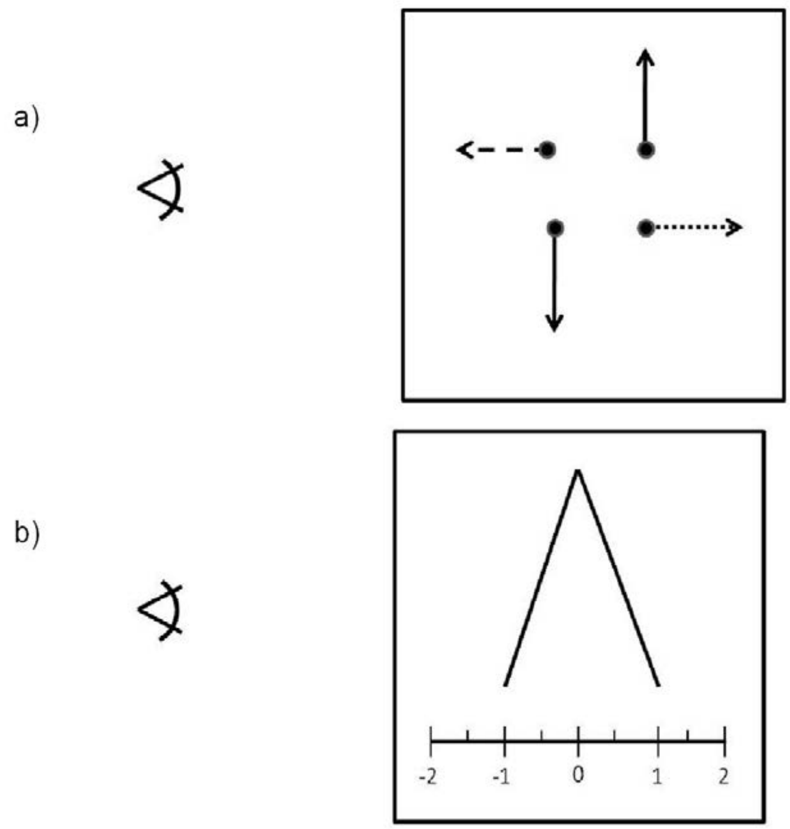

Figura 2.3: **a)** Representación de un sistema con cuatro partículas. Las flechas son vectores que representan las velocidades de las partículares, la longitud indica la magnitud de la velocidad (todas tienen la misma magnitud) y la dirección indica la dirección en la que se mueve la partícula. Para hacer más esquemático el dibujo todas las flechas apuntan hacia afuera, esto se hizo así para que se pueda visualizar más claramente que las partículas se mueven en distintas direcciones. **b)**Representación del número de partículas que ve el observador en cada dirección hacia él ve solo una, la cual está en " -1" alejándose de él también ve solo una (que está en 1) y en direcciones transversales ve dos partículas. Debido a la dirección en la que se mueven estas dos partículas no producen desplazamiento Doppler y por eso están en "O".

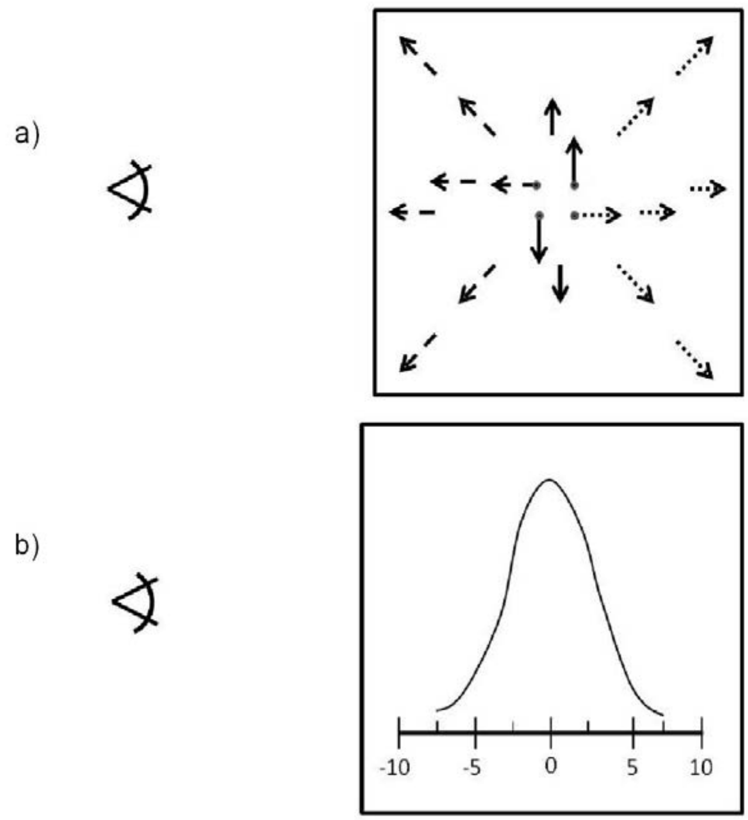

Figura 2.4: **a)** Figura similar a 2.3a) pero aquí se representan 18 partículas. **b)** Número de partículas respecto del desplazamiento Doppler.

Capítulo 3

Leyes de Kepler y Fuerza de Gravedad

Las Leyes de Kepler describen el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol, son tres leyes formuladas por Johannes Kepler (astrónomo alemán) a principios del siglo XVII sobre el movimiento de los planetas. Estas leyes están basadas en datos obtenidos por el astrónomo danés Tycho Brahe.

3.1. Primera Ley de Kepler

La primera Ley de Kepler la podemos describir de la siguiente manera: *Cada planeta gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica y el Sol se encuentra en uno de los focos de dicha elipse.*
Para entender mejor la descripción anterior vamos a revisar algunos conceptos relacionados a la elipse, con los cuales podremos entender qué significa que la órbita de un planeta sea elíptica.

3.1.1. Parámetros de una elipse

Para describir una elipse se emplean varios parámetros que nos dan información de que tan alargada es dicha elipse y también de si es alargada vertical u horizontalmente.

Eje mayor y eje menor

Una elipse tiene dos ejes, el eje mayor y el eje menor pero, en matemáticas es más común usar los semiejes, los cuales corresponden a la mitad de los ejes. El semieje mayor es un término muy importante, aquí lo vamos a denotar con la letra a (minúscula).

Focos de una elipse

Una elipse tiene dos puntos llamados focos, los cuales se encuentran sobre el eje mayor. Usando los focos vamos a esquematizar de una forma sencilla la definición matemática de una elipse. Primero, vamos a suponer que tenemos dos clavos en una tabla. Si con un hilo hacemos

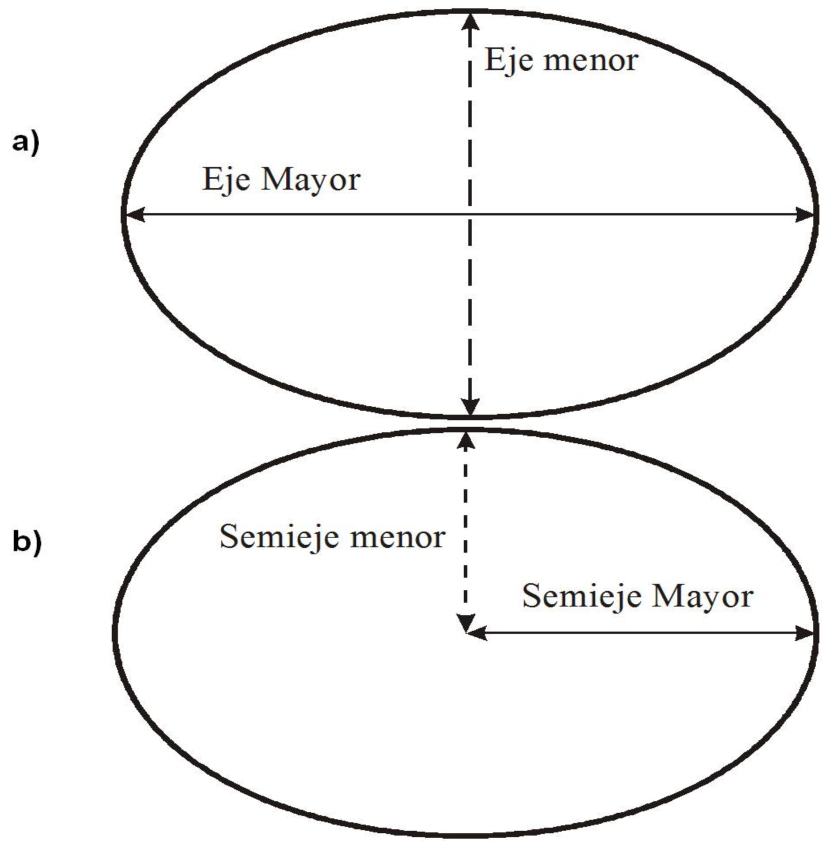

Figura 3.1: **a)** Representación del eje mayor y del eje menor de una elipse. **b)** Representación del semieje mayor y del semieje menor de una elipse

.

un aro y el aro lo hacemos pasar por los dos clavos y también por un lápiz colocado sobre la tabla, entonces podemos dibujar una elipse, solo tenemos que ir girando el lápiz alrededor de los clavos manteniendo tenso el hilo (Figura 3.3).

Los clavos de la Figura 3.3 están en los focos de la elipse. Matemáticamente lo anterior significa que cada uno de los puntos de la elipse debe cumplir con una condición importante. Vamos a denotar con F a la distancia entre los focos, con Q a la distancia entre un Foco y un punto dado de la elipse y con R a la distancia entre el otro Foco y el mismo punto dado de la elipse. Al dibujar la elipse con el lápiz y el hilo de longitud constante resulta que la condición es que $F + Q + R = constante$.

Es decir la suma F + Q + R, siempre va a ser la misma distancia. En el ejemplo esa distancia es simplemente la longitud del hilo que se usó para hacer el aro. En la Figura:3.2 en la elipse inferior-derecha se muestra la longitud total de la cuerda. La suma de F + Q + R, es igual a la longitud de la cuerda con la que trazamos una elipse, como se muestra en la Figura 3.2.

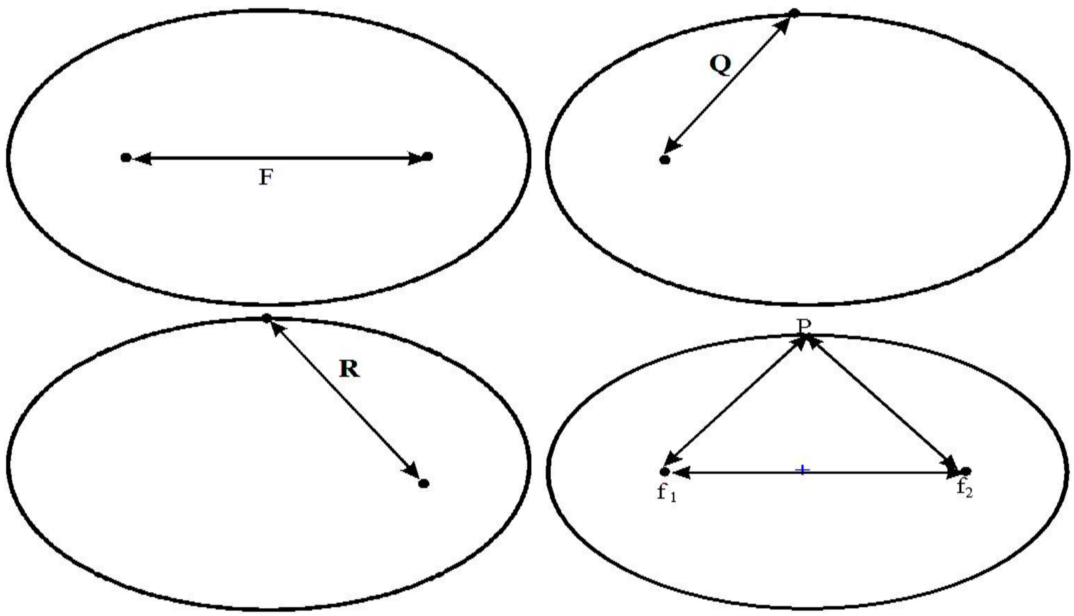

Figura 3.2: En la elipse superior-izquierda se dibuja la distancia (F) entre los focos de la elipse. En la elipse superior-derecha se dibuja la distancia (Q) entre un foco y un punto de la elipse. En la elipse inferior-izquierda se muestra la distancia (R) entre el otro foco y el mismo punto de la elipse. En la elipse inferior-derecha se muestran F, Q, R distancias juntas.

Excentricidad

Para tener una idea de que tan alargada es una elipse se usa el término excentricidad. Una de las formas de expresar la excentricidad (ε) es

$$\varepsilon = \frac{C}{a} \tag{3.1}$$

Donde a es el semieje mayor y C es la distancia entre un foco y el centro de la elipse. (Ecuación 3.1) La excentricidad de una elipse es mayor entre más alargada sea ésta y sólo puede tomar valores entre cero y uno. A medida que la excentricidad disminuye el eje mayor de la elipse disminuye y el valor de C también. Si la excentricidad es igual a cero entonces el centro de la elipse coincide con los focos y tenemos una circunferencia. Ese caso lo expresamos matemáticamente como

$$C = 0 \tag{3.2}$$

entonces

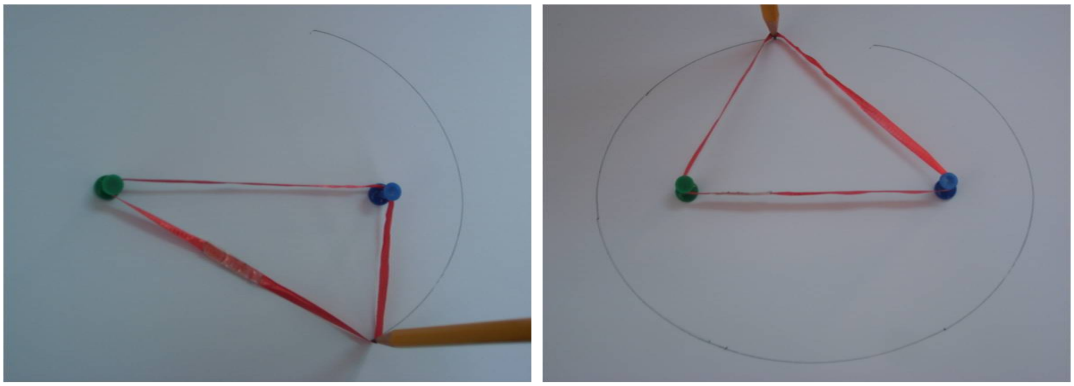

Figura 3.3: Trazo de una elipse

$$\frac{0}{a} = 0. \tag{3.3}$$

Lo cual, precisamente indica que una elipse con excentricidad igual a cero es equivalente a que la distancia entre un foco y el centro es cero. En el Ejercicio 3.5.1 se da un ejemplo de órbita con excentricidad pequeña (órbita de la Tierra) y en el Ejercicio 3.5.2 el de una órbita con excentricidad grande (la órbita de Plutón).

En términos de la excentricidad (ε), la distancia mínima al Sol es

$$r = a(1 - \varepsilon) \tag{3.4}$$

donde a es el semieje mayor. La distancia máxima es

$$r = a(1 + \varepsilon). \tag{3.5}$$

El punto más cercano al Sol es el *Perihelio* y el más lejano es el *Afelio*. En el Ejercicio 3.5.6 se aplican las Ecuaciones 3.4 y 3.5 para calcular la distancia mínima y máxima del cometa Halley al Sol.

3.2. Segunda Ley de Kepler

La segunda Ley de Kepler se puede expresar de la siguiente manera: *La línea que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*
Para entender mejor esta ley vamos a tomar dos áreas iguales, una del lado derecho de la elipse,

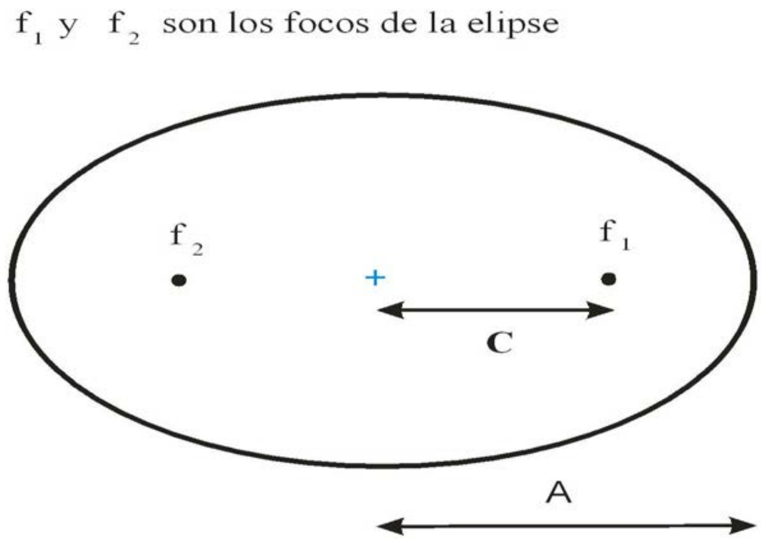

Figura 3.4: Representación de los focos de una elipse y de la distancia entre el centro y un foco (a la cual denotamos con la letra C)

.

es decir del lado del foco 1 y otra área del lado izquierdo de la elipse, donde esta el foco 2 y vamos a suponer que el Sol está en el foco 1.

Si comparamos los segmentos de elipse que recorre el planeta podemos notar lo siguiente: Cuando el planeta está más cercano al Sol recorre un arco mayor que en el otro extremo de la elipse. Si recordamos que ambos arcos se recorren en el mismo tiempo entonces, es claro que cerca del Sol la velocidad del planeta es mayor que cuando está más lejos. Lo anterior lo podemos decir de manera simplificada como:

La velocidad de un planeta sobre su órbita es mayor cuando está cerca del Sol que cuando está lejos.

3.3. Tercera Ley de Kepler

Esta ley expresa, mediante una ecuación, la relación que hay entre el período de un planeta alrededor del Sol y el semieje mayor de su órbita.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\ (M+m)}{4\pi^2} \tag{3.6}$$

donde T es el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta alrededor del Sol (período), M es la masa del Sol, m es la masa de un planeta dado, a es el semieje de la órbita de dicho planeta y G es la constante de gravitación.

3.3.1. Aproximación para el caso $m << M$

La masa m de cualquier planeta del sistema Solar es mucho menor que la masa del Sol, M. Entonces en lugar de la suma $M + m$ podemos usar M, la masa del Sol, con lo cual la Ecuación 3.6 queda como

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\ M}{4\pi^2}. \tag{3.7}$$

Del lado derecho de la Ecuación 3.7 no tenemos ningún término del planeta. El resultado del cociente $\frac{a^3}{T^2}$ es el mismo para cualquier objeto de masa $m << M_\odot$ que orbite al Sol y, por lo tanto, es un valor constante. Es decir, el lado derecho es igual para todos los planetas del Sistema Solar. Mas adelante en la parte de Ejercicios se muestra un ejemplo en el que se usa el hecho de que el lado derecho de la Ecuación 3.7 no depende del planeta sino de la masa M (en este caso del Sol) y por lo tanto toma el mismo valor para cualquier planeta del sistema solar.

3.3.2. Expresión de la Tercera Ley usando años terrestres y Unidades Astronómicas.

La Tercera Ley de Kepler nos puede servir para calcular la distancia de un planeta al Sol si conocemos el período de dicho planeta. Como esta ecuación es válida para cualquier planeta entonces es válida para la Tierra. Es importante mencionar que se define la *Unidad Astronómica* 1 UA como la distancia media entre el Sol y la Tierra, que es de aproximadamente 150 millones de km. Si tomamos los valores de la Tierra en la ecuación de la Tercera Ley de Kepler tenemos que

$$\frac{a^3}{T_2} = \frac{(1\ UA)^3}{(1\ año)^2}. \tag{3.8}$$

Entonces, podemos calcular la distancia al Sol de cualquier otro planeta con sólo saber su período de rotación alrededor del Sol, ya que la ecuación queda como

$$a^3 = T^2 \tag{3.9}$$

lo que podemos expresar de forma que se pueda usar muy fácilente,

$$a^3(UA^3) = T^2(año^2) \tag{3.10}$$

donde a está dada en *Unidades Astronómicas* (UA) y T está dado en *años terrestres*. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

El tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta al Sol, elevado al cuadrado, es igual al semieje mayor de su órbita al cubo.

En el Ejercicio 3.5.5 se muestra un ejemplo de como podemos usar la Ecuación 3.9 para calcular distancias cuando conocemos el período.

3.4. Ley de la Gravitación Universal

La fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Usando la Constante de Gravitacón Universal G se tiene la siguiente expresión

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{3.11}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos. Esta expresión es válida para cualquier par de cuerpos y por lo tanto es válida para algún planeta y el Sol ó para la Tierra y la Luna. Es común usar m para designar la masa del cuerpo menos masivo y M para designar la masa del más masivo. La Ecuación 3.11 tiene muchas aplicaciones, una de las más sencillas es el cálculo de la masa del cuerpo más masivo (M) cuando la órbita del cuerpo menos masivo es circular. Este ejemplo se muestra en el Ejercicio 3.5.9.

3.5. Ejercicios con respuesta

3.5.1. Excentricidad de la órbita de la Tierra.

La excentricidad de la órbita de la Tierra es de $\epsilon = 0{,}017$. Si dibujamos la órbita de la Tierra con un círculo cuyo diámetro sea 10 cm, ¿de cuántos *milímetros* es C (distancia entre un foco y el centro de la elipse)?

Respuesta

De acuerdo a la definición que dimos anteriormente esto quiere decir que

$$\varepsilon = \frac{C}{a} = 0{,}017 \tag{3.12}$$

donde C es la distancia entre el centro de la elipse y el foco y a es el semieje mayor. Por lo tanto,

$$C = 0{,}017\ a. \tag{3.13}$$

Esto quiere decir que la distancia entre el centro de la elipse y el foco es muy pequeña comparada con el semieje mayor. Esto lo visualizamos dibujando una elipse en la que el semieje mayor es de 10 *cm*. Ahora, vamos a ver cual sería la distancia entre el foco y el centro de la elipse. Matemáticamente esto lo podemos expresar de la siguiente manera

$$a = 10\ cm. \tag{3.14}$$

Con base en la igualdad entre C y a podemos calcular el valor de C, el cual resulta ser

$$C = 0{,}017 \times 10\ cm \tag{3.15}$$

$$C = 0{,}17\ cm \tag{3.16}$$

$$C = 1{,}7\ mm. \tag{3.17}$$

Es decir, la distancia entre el foco y el centro de la elipse (el valor de C), es menor de dos milímetros. Esta distancia es muy pequeña comparada con el eje mayor. Si dibujamos la elipse parecería una circunferencia. Entonces, podemos decir que la órbita de la Tierra, aunque es elíptica, se aproxima mucho a una circunferencia.

3.5.2. Excentricidad de la órbita de Plutón y excentricidad de la órbita de Neptuno.

Hasta hace pocos años Plutón se consideraba un planeta y se decía que era el noveno planeta por ser el más alejado del Sol. La excentricidad de Plutón es de 0.25, mientras que la excentricidad de Neptuno es 0.01.

a) Haz un dibujo para representar esquemáticamente las órbitas de Neptuno y Plutón y la posición del Sol en ambas.

b) Analizando la órbita de Plutón ¿éste siempre está más lejos del Sol que Neptuno?

Respuesta

a) De acuerdo a la Primera Ley de Kepler el Sol está en uno de los focos de la elipse punteada y en uno de los focos de la elipse contínua de la Figura 3.7.

b) Al hacer coincidir los focos de las dos elipses que representan las órbitas resulta que la órbita de Plutón es más alargada que la de Neptuno. En una zona Plutón está más cerca del Sol que Neptuno. En otra zona Plutón está más lejos del Sol que Neptuno.

3.5.3. Segunda Ley de Kepler y conservación del momento angular

La segunda ley de Kepler es una forma de expresar la ley de conservación del momento angular. El área que barre el planeta la podemos expresar de manera aproximada como

$$A = r \times c \tag{3.18}$$

donde c es el arco que barre el planeta en su órbita.
a) Demuestra que se cumple que

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{3.19}$$

b) Explica por qué esta ecuación es equivalente a la Segunda Ley de Kepler.

Respuesta

a) El área en la zona próxima al Sol es

$$A_1 = r_1 \times c_1 \tag{3.20}$$

y el área en la zona alejada es

$$A_2 = r_2 \times c_2. \tag{3.21}$$

Como las recorre en el mismo tiempo y las áreas son iguales entonces

$$\frac{r_1 \times c_1}{t} = \frac{r_2 \times c_2}{t}. \tag{3.22}$$

Por otro lado, la velocidad en su órbita es

$$v = \frac{c}{t} \tag{3.23}$$

entonces, la Ecuación 3.22 la podemos escribir como

$$r_1 \times v_1 = r_2 \times v_2. \tag{3.24}$$

Si multiplicamos ambos lados de la Ecuación 3.25 por la masa del planeta la igualdad se conserva (ya que la masa no cambia durante su movimiento en órbita). Entonces, tenemos que

$$m \times r_1 \times v_1 = m \times r_2 \times v_2 \tag{3.25}$$

lo cual precisamente expresa la conservación del momento angular, lo cual es

$$L = m \times r_1 \times v_1. \tag{3.26}$$

Si ahora calculamos el cociente entre las velocidades tenemos

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{3.27}$$

b) Si $r_1 < r_2$ tenemos un cociente que resulta ser mayor que 1 y entonces la relación entre las velocidades es $v_1 > v_2$. Esto, significa que la velocidad es mayor cuando la distancia es menor, que es precisamente lo que establece la Segunda Ley de Kepler.

3.5.4. Comparación entre los períodos y las distancias de dos planetas.

Para entender mejor la Tercera Ley de Kepler vamos a ver que sucede con dos planetas que están a diferentes distancias del Sol. En el caso general vamos a decir que el semieje de la órbita del planeta 1 es a_1, el del planeta 2 es a_2 y que sus períodos son T_1 y T_2, respectivamente. Si el planeta 2 está a una distancia que es igual a 5 veces la distancia del planeta 1, es decir

$$a_2 = 5a_1 \tag{3.28}$$

encuentra la relación entre T_1 y T_2.

Respuesta

Por la Tercera Ley de Kepler podemos representar los períodos y los semiejes mayores de las órbitas de los dos planetas mediante las siguientes ecuaciones

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{G\ M}{4\pi^2} \tag{3.29}$$

y

$$\frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{G\ M}{4\pi^2}. \tag{3.30}$$

Por lo tanto,

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}. \tag{3.31}$$

Ahora, vamos a calcular el período del planeta 2 (T_2) en términos del período del planeta 1 (T_1), para lo cual escribimos la Ecuación 3.31 de la siguiente manera

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3}. \tag{3.32}$$

Sustituyendo $a_2 = 5a_1$ en la Ecuación 3.32 resulta

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{(5a_1)^3}{a_1^3}. \tag{3.33}$$

Entonces

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{125a_1^3}{a_1^3} = 125 \tag{3.34}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{125} \tag{3.35}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 11{,}2. \tag{3.36}$$

Lo cual lo podemos escribir como,

$$T_2 = 11{,}2\ T_1. \tag{3.37}$$

Esto quiere decir que el período del planeta 2 es 11.2 veces el período del planeta 1. Esto se debe a que, el período de un planeta que está más lejano al Sol es mayor que el período de un planeta que está más cerca del Sol.

3.5.5. Cálculo de la distancia de Saturno al Sol

A partir de la Ecuación 3.9, podemos calcular el semieje de la órbita de cualquier planeta. Por ejemplo, el período de rotación de Saturno alrededor del Sol es de 29.5 años. A partir de dicho período calcula el semieje mayor de la órbita de Saturno.

Respuesta

Partimos de la siguiente ecuación

$$a_s^3 = T_s^2 \tag{3.38}$$

y sustituimos el período de Saturno (T_s), lo cual da

$$a_s^3 = (29{,}5)^2 \tag{3.39}$$

es decir,

$$a_s = \sqrt[3]{(29{,}5)^2}. \tag{3.40}$$

Lo anterior significa que elevamos 29,5 al cuadrado y después calculamos la raíz cúbica del resultado. Entonces, el semieje mayor de la órbita de Saturno es

$$a_s = 9{,}5\ UA. \tag{3.41}$$

Para obtener el resultado en *kilómetros* solo multiplicamos por el valor de 1 UA dado en *kilómetros* (1 $UA = 150\ 000\ 000\ km$), entonces

$$a_s = 9{,}5 \times 150\ 000\ 000\ km \tag{3.42}$$

$$a_s = 1425\ 000\ 000\ km. \tag{3.43}$$

Usando el semieje mayor y las Ecuaciones 3.4 y 3.5 podemos calcular las distancias mínima (*Perihelio*) y máxima (*Afelio*) de Saturno al Sol.

3.5.6. La mínima y la máxima distancia del cometa Halley al Sol

Las Leyes de Kepler se aplican no sólo a los planetas sino también a otros cuerpos. Sabiendo el período del cometa Halley, que es de 76 años, calcula el semieje mayor de su órbita.

Respuesta

Aplicamos la Tercera Ley de Kepler dada en UA y años terrestres. Entonces tenemos que

$$a^3 = (76)^2. \tag{3.44}$$

Calculando la raíz cúbica de ambos lados de la igualdad tenemos que

$$a = \sqrt[3]{(76)^2} \tag{3.45}$$

lo cual resulta en

$$a = 17{,}94\ UA. \tag{3.46}$$

La excentricidad de la órbita del cometa Halley es

$$\varepsilon = 0{,}967. \tag{3.47}$$

Podemos calcular la distancia mínima entre el cometa Halley y el Sol y también la distancia máxima. La distancia mínima es

$$r_{min} = a(1 - \varepsilon). \tag{3.48}$$

Sustituyendo valores tenemos que

$$\begin{aligned} r_{min} &= 17{,}94(1 - 0{,}967) && (3.49) \\ &= 0{,}592\ UA. && (3.50) \end{aligned}$$

La distancia máxima es

$$\begin{aligned} r_{max} &= 17{,}94(1 + 0{,}967) && (3.51) \\ &= 35{,}288\ UA. && (3.52) \end{aligned}$$

Como podemos ver, de los resultados anteriores, hay una gran diferencia entre la distancia mínima y la distancia máxima. Esto se debe, precisamente, a que la excentricidad de la órbita del cometa Halley es muy grande.

3.5.7. Cálculo de la masa del Sol.

Uno de los parámetros que aparece en la Tercera Ley de Kepler representa a la masa del Sol (M), usando dicha Ley calcula la masa del Sol.

Respuesta

Partimos de la Ecuación 3.30 que expresa la Tercera Ley de Kepler

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\ M}{4\pi^2}. \tag{3.53}$$

Primero pasamos $4\pi^2$ al otro lado de la igualdad, después pasamos G y entonces queda M sola de un lado de la igualdad

$$\frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = M. \tag{3.54}$$

Para la Tierra conocemos bien estos datos, los cuales escribimos a continuación:

$$a = 150\ 000\ 000\ km \tag{3.55}$$

$$T = 1\ (año). \tag{3.56}$$

Sustituyendo estos valores tenemos que la masa del Sol es

$$M = 2 \times 10^{33} g \tag{3.57}$$

donde (g) es gramos, entonces la masa del Sol es aproximadamente igual a $M = 2 \times 10^{30}\ kg$.

3.5.8. Fuerzas en equilibrio

¿A qué distancia de la Tierra debe estar un cuerpo para que sienta un equilibrio entre las fuerzas gravitacionales que ejercen sobre él el Sol y la Tierra? La distancia media de Sol a la Tierra es de $1.5 \times 10^8\ km$ y la masa del Sol es 332 946 masas terrestres.

Respuesta

Para que un objeto esté en equilibrio entre la Tierra y el Sol, las fuerzas gravitacionales deberán estar en equilibrio. Si definimos F_1 como la fuerza entre el objeto y el Sol, se tiene que

$$F_1 = G\frac{mM_\odot}{r_1^2},$$

donde m es la masa del objeto, $M_\odot$ es la masa del Sol y r_1 es la distancia del Sol al objeto en equilibrio. Por otro lado, definimos F_2 como la fuerza entre el objeto y la Tierra, entonces se tiene que

$$F_2 = G\frac{mM_\oplus}{r_2^2},$$

donde m es la masa del objeto, $M_\oplus$ la masa de la Tierra y r_2 es la distancia de la Tierra al objeto en equilibrio. Para que el objeto este en equilibrio, F_1 y F_2 deberán ser iguales, es decir

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ G\frac{mM_\odot}{r_1^2} &= G\frac{mM_\oplus}{r_2^2} \\ \frac{M_\odot}{r_1^2} &= \frac{M_\oplus}{r_2^2}. \end{aligned}$$

Por otra parte, $r_1 + r_2 = 1.5 \times 10^8$ km es la distancia Tierra-Sol y la masa del Sol es $M_\odot = 332\,946 M_\oplus$. Como el enunciado pide la distancia a la que deberá estar el objeto de la Tierra, entonces necesitamos determinar r_2. Así que escribimos la igualdad en términos de r_2

$$\begin{aligned} \frac{332\,946 M_\oplus}{(1.5 \times 10^8\ km - r_2)^2} &= \frac{M_\oplus}{r_2^2} \\ M_\oplus(1.5 \times 10^8\ km - r_2)^2 &= 332\,946 M_\oplus r_2^2 \\ (1.5 \times 10^8\ km)^2 - 2(1.5 \times 10^8\ km)r_2 + r_2^2 &= 332\,946 r_2^2, \end{aligned}$$

$$(-332\,945)r_2^2 - (3 \times 10^8\ km)r_2 + 2.25 \times 10^{16}\ km = 0.$$

Resolviendo para r_2 se tiene que $r_2 = -260\,410$ km y $r_2 = 259\,508.95\ km$. Por lo tanto, quien tiene valor físico es $r_2 = 259\,508.95\ km$, debiendo colocarse el objeto a 259 508 km aproximadamente de la Tierra.

3.5.9. Cálculo de la masa de la Tierra

Una de las formas de calcular la masa de la Tierra es a través de la Ley de Gravitación Universal. La Luna es el satélite natural de la Tierra. Utilizando la distancia entre la Luna y la Tierra, y el período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra, calcula la masa de esta última.

Respuesta

La fuerza que existe entre la Luna y la Tierra se expresa de acuerdo a la ley de gravitación Universal como

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \tag{3.58}$$

Pero la fuerza también se puede expresar, por la segunda ley de Newton, de la siguiente manera

$$F = ma \tag{3.59}$$

donde m es la masa de la Luna,a en este caso es la aceleración centrípeta que tiene la Luna debido a la acción de la Tierra, entonces, igualando estas fuerzas tenemos que

$$\frac{GMm}{r^2} = ma \tag{3.60}$$

como en ambos lados de la igualdad se encuentra la masa de la Luna (m) podemos escribir la ecuación 3.60 de la siguiente manera

$$\frac{GM}{r^2} = a. \tag{3.61}$$

La Luna experimenta una aceleración centrípeta debido a que gira alrededor de la Tierra. Dicha aceleracón se expresa de la siguiente manera:

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{3.62}$$

Donde (v) es la velocidad lineal de la Luna alrededor de la Tierra. Entonces la igualdad queda como

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \tag{3.63}$$

y podemos ver que

$$M = \frac{v^2 r^2}{Gr} \tag{3.64}$$

pero, también sabemos que $\frac{r^2}{r} = r$

$$M = \frac{v^2 r}{G}. \tag{3.65}$$

Por otro lado, la velocidad lineal (v) está dada por

$$v = \frac{d}{T} \tag{3.66}$$

donde d es la distancia que recorre el cuerpo y T es el tiempo que tarda en recorrer d. Como el movimiento lo consideramos circular, el perímetro (d) de una circunferencia es simplemente

$$d = 2\pi\ r. \tag{3.67}$$

Sustituyendo en la Ecuación 3.66 tenemos que

$$v = \frac{2\pi\ r}{T} \tag{3.68}$$

y si ésta se sustituye en la Ecuación 3.64 de la masa tenemos

$$M = \frac{(\frac{2\pi\ r}{T})^2\ r}{G}. \tag{3.69}$$

Simplificando resulta que

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2\ G}. \tag{3.70}$$

Sustituyendo los valores en esta última ecuación tenemos que

$$M = \frac{4(3{,}1416)^2(384\ 401\ 000\ m)^3}{(6{,}67 \times 10^{-11}\frac{m^3}{s^2 kg})(27{,}32 \times 86\ 400 s)^2}. \tag{3.71}$$

Entonces, la masa de la Tierra es

$$M = 5{,}97 \times 10^{27} g \tag{3.72}$$

con g en gramos, o bien en *kilogramos* tenemos que la masa de la Tierra es

$$M = 5{,}97 \times 10^{24} kg. \tag{3.73}$$

3.5.10. Masa de la Tierra

Supón que la Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita circular y con un período de 27 días, a una distancia de 384 401 km, calcula la masa de la Tierra. Considera el valor de $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Respuesta

La fuerza centrípeta se define como

$$F_c = 4\pi^2 f^2 mR, \tag{3.74}$$

donde m es la masa del objeto, f es la frecuencia de y R es el radio de giro. Por otra parte, la fuerza gravitacional se define como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde m_1 y m_2 son las masas de cualquier par de objetos separados por una distancia r y G es la constante de Gravitación Universal igual a $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$. Para que la Luna de masa m, se mantenga girando alrededor de la Tierra, cuya masa es $M_\oplus$, a una distancia d, la fuerza centrípeta, F_c, debe ser igual a la fuerza gravitacional, F_g, en un período T. Igualando la fuerza centrípeta (3.74) con la fuerza gravitacional (3.5.10) se tiene que

$$\begin{aligned} F_c &= F_g \\ \frac{4\pi^2 md}{T^2} &= \frac{GmM_\oplus}{d} \\ M_\oplus &= \frac{4\pi^2 d^3}{GT^2} \\ M_\oplus &= 5.97 \times 10^{24}\ kg \end{aligned}$$

La masa de la Tierra es $M_\oplus = 5.97 \times 10^{24}\ kg$.

3.5.11. Peso de una persona en Júpiter

Supongamos que el peso de una persona en la Tierra es de $637 Newtons$. Si la masa de Júpiter es 317.82 veces la de la Tierra y su radio es 11.2 veces el de la Tierra, ¿cuál sería el peso de esa persona en Júpiter?

Respuesta

Debemos sacar la razón de la fuerza que experimentaría la persona en Júpiter y la que experimenta en la Tierra, es decir

$$
\begin{aligned}
\frac{F_J}{F_\oplus} &= \frac{\frac{GmM_J}{R_J^2}}{\frac{GmM_\oplus}{R_\oplus^2}} \\
\frac{F_J}{F_\oplus} &= \frac{M_J R_\oplus^2}{M_\oplus R_J^2}.
\end{aligned}
$$

Como $M_J = 31\,782 M_\oplus$ y $R_J = 11.2 R_\oplus$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{F_J}{F_\oplus} &= \frac{317.82 M_\oplus R_\oplus^2}{M_\oplus (11.2)^2 R_\oplus^2} \\
\frac{F_J}{F_\oplus} &= \frac{317.82}{(11.2)^2} \\
\frac{F_J}{F_\oplus} &= 2.53 \\
F_J &= 1\,613.9\ N.
\end{aligned}
$$

3.5.12. Masa de la Tierra

Calcula la masa de la Tierra suponiendo que es una esfera de radio 6.37×10^6 metros y que el valor de la aceleración de la gravedad sobre su superficie es de $9.8\ \frac{m}{s^2}$. Considera el valor de la constante $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Respuesta

Partiendo de la segunda ley de Newton y de la fuerza de Gravitación Universal, se tiene que

$$
\begin{aligned}
mg &= \frac{GmM_\oplus}{R_\oplus^2} \\
g &= \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} \\
M_\oplus &= R_\oplus^2 \frac{g}{G} \\
M_\oplus &= (6\,370\,000\ m)^2 \frac{9.8\ \frac{m}{s^2}}{6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}}.
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos que la masa de la Tierra es

$$
M_\oplus = 5.96 \times 10^{24} Kg.
$$

3.5.13. Aceleración debida a la fuerza de gravedad de la Tierra en la estación espacial

Determina la aceleración de gravedad que sienten los astronautas de la estación internacional si ésta se encuentra a 396 km sobre la superficie de la Tierra. El radio de la Tierra es de 6 378 km y su masa es 5.97×10^{24} kg, considera que $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Respuesta

Aplicando la segunda ley de Newton y la ley de Gravitación Universal, se tiene que

$$\begin{aligned}
mg &= \frac{GM_\oplus m}{(R_\oplus + h)^2} \\
g &= \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} \\
g &= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.97 \times 10^{24}\ kg)}{(6\,378\,000\ m + 396\,000\ m)^2} \\
g &= 8.67\ \frac{m}{s^2}.
\end{aligned}$$

3.5.14. Telescopio Hubble

El telescopio Hubble se encuentra orbitando a 600 km sobre la superficie de la Tierra. Si la masa de la Tierra es de 5.97×10^{24} kg y su radio ecuatorial es 6 378 km, determina cuál es la velocidad con que viaja el telescopio alrededor de la Tierra. Considera que $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Respuesta

Para que el objeto se mantenga girando alrededor de la Tierra y ésta no caiga o salga fuera de órbita, es necesario que la fuerza de gravedad sea igual a la fuerza centrípeta, es decir

$$\begin{aligned}
F_c &= F_g \\
\frac{mv^2}{r} &= \frac{GmM_\oplus}{r^2}.
\end{aligned}$$

Considerando el radio de la Tierra ,$R_\oplus = 6378$ km, y la distancia a la que se encuentra dicho telescopio, $d = 600$ km, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{mv^2}{r} &= \frac{GmM_\oplus}{r^2} \\
v^2 &= \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + d} \\
v &= 7558.4\ \frac{m}{s}.
\end{aligned}$$

3.5.15. Radio de la Luna

Durante la formación de la Luna se sabe que la fuerza que ejercía sobre la Tierra era 4 000 veces la fuerza actual y que la Luna se encontraba a 21 000 km de la Tierra. A través del tiempo la Luna se ha ido alejando de la Tierra, de tal manera que la distancia Tierra-Luna es de 384 401 km y cuya masa actual es de $7.34 \times 10^{22}\ kg$. Con base a lo anterior, determina

a)¿Cuál fue la masa de la Luna cuando se encontraba a 21 000 km de la Tierra?

b)Si la densidad de la Luna no cambió desde ese entonces, siendo de 3 300 $\frac{kg}{m^3}$ ¿cuál era el radio de la Luna en ese entonces?

Respuesta

a) Se va determinar la fuerza que existe actualmente entre la Luna y la Tierra, asícomo la fuerza que existió cuando la distancia que los separa era de 21 000 km. Partiendo de la fuerza de gravitación universal, se tiene que

$$F_1 = \frac{Gm_1 M_\oplus}{r_1^2} \quad , \quad F_2 = \frac{Gm_2 M_\oplus}{r_2^2},$$

donde F_1, m_1 son la fuerza y la masa de la Luna cuando estaban separadas por 21 000 km; F_2 y m_2 representan la fuerza y la masa de la Luna actual, respectivamente. La fuerza hace años era 4 000 veces la actual, se tiene que $F_1 = 4\,000 F_2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F_2} &= \frac{m_1 r_2^2}{m_2 r_1^2} \\ 4\,000 &= \frac{m_1 r_2^2}{m_2 r_1^2} \\ m_1 &= \frac{4\,000 m_2 r_1^2}{r_2^2} \\ m_1 &= 8.7723 \times 10^{23}\ kg. \end{aligned}$$

b) Partimos de la expresión de $\rho = M/V$, siendo V el volumen de una esfera perfecta, asíel radio es

$$\begin{aligned} V &= \frac{M}{\rho} \\ \frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{M}{\rho} \\ R &= \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} \\ R &= 3\,988.751\ km. \end{aligned}$$

3.5.16. Masa de Júpiter

Los períodos de rotación de la Tierra y de Júpiter alrededor del Sol son 1 año y 11.85 años y sus distancias al Sol son 1 UA y 5.20 UA, respectivamente. Si la masa del Sol es 332 946 veces la de la Tierra, cuya masa es $5.97 \times 10^{24}\ kg$, determina la masa de Júpiter.

Respuesta

Aplicando la tercera ley de Kepler a Júpiter y el Sol, se tiene que

$$G(M_{\odot} + m_J) = 4\pi^2 \frac{a_J^3}{T_J^2}.$$

Haciendo lo mismo para sistema Sol y Tierra, se tiene que

$$G(M_{\odot} + m_{\oplus}) = 4\pi^2 \frac{a_{\oplus}^3}{T_{\oplus}^2}.$$

Puesto que la tercera ley se cumple para ambos sistemas, siendo igual a una constante, podemos igual las expresiones anteriores de manera que

$$\begin{aligned} \frac{M_{\odot} + m_J}{M_{\odot} + m_{\oplus}} &= \left(\frac{T_{\oplus}}{T_J}\right)^2 \left(\frac{a_J}{a_{\oplus}}\right)^3 \\ m_J &= (M_{\odot} + m_{\oplus}) \left(\frac{T_{\oplus}}{T_J}\right)^2 \left(\frac{a_J}{a_{\oplus}}\right)^3 - M_{\odot} \\ m_J &= 2.63 \times 10^{27}\ kg. \end{aligned}$$

3.5.17. Distancia media de la Luna y la Tierra

El radio de la Luna es 1740 km, su densidad es 3 300 $\frac{kg}{m^3}$ y su masa es $\frac{1}{81}$ la de la Tierra. Si su período de rotación alrededor de la Tierra es de 27.5 días, ¿cuál es la distancia media entre la Tierra y la Luna? Considera $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Respuesta

Se sabe que $M_{\oplus} = 81 M_L$, por otra parte, para relacionar su densidad, partimos de

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{M_L}{V_L} \\ M_L &= \frac{4}{3}\pi \rho_L R_L^3. \end{aligned}$$

Ahora aplicando la tercera ley de Kepler al sistema Tierra -Luna, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{GM_\oplus}{4\pi^2} \\
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{81GM_L}{4\pi^2} \\
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{27G\rho_L R_L^3}{\pi} \\
a &= 3R_L\sqrt[3]{\frac{G\rho_L T_L^2}{\pi}} \\
a &= 381\,315.7\ km.
\end{aligned}$$

3.5.18. Cálculo del radio de Júpiter

Himalia es un satélite natural de Júpiter con un período de 250 días, el cual orbita alrededor de él a una distancia de 11 480 000 km. Si la densidad media de Júpiter es $1330\,\frac{kg}{m^3}$, determina el radio de Júpiter suponiendo que es una esfera perfecta.

Respuesta

Primero se determina la masa de Júpiter (M_J), partiendo de la defınción y considerando que es una esfera perfecta, se tiene que

$$\begin{aligned}
M_J &= \rho_J V_J \\
M_J &= \frac{4\pi R_J^3 \rho_J}{3}.
\end{aligned}$$

Ahora aplicando la tercera ley de Kepler y sustituyendo su masa, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{GM_J}{4\pi^2} \\
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{4\pi G\rho_J R_J^3}{3\cdot 4\pi^2} \\
R_J^3 &= \frac{3\pi a^3}{G\rho_J T^2} \\
R_J &= \sqrt[3]{\frac{3\pi}{G\rho_J T^2}}a
\end{aligned}$$

Por lo tanto el radio de Júpiter es aproximadamente

$$R_J = 70\,009.7\ km.$$

3.5.19. Densidad de la Tierra

La masa de la Luna es 1/81 la de la Tierra y su densidad es 3/5 la de la Tierra. Si la distancia media entre la Tierra y la Luna es 221 veces el radio de la Luna y el período de rotación de la Luna es de 27.5 días, calcula la densidad de la Tierra. Considera $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Respuesta

Se sabe que la densidad de la Luna es $\rho_L = 3/5\rho_\oplus$ y que la masa de la Luna es $M_L = M_\oplus/81$. Entonces, la masa de la Tierra es

$$\begin{aligned}
M_L &= \rho_L V_L \\
M_L &= \frac{3}{5}\rho_\oplus \cdot \frac{4}{3}\pi R_L^3 \\
M_L &= \frac{4}{5}\pi \rho_\oplus R_L^3 \\
\frac{M_\oplus}{81} &= \frac{4\pi\rho_\oplus R_L^3}{5} \\
M_\oplus &= \frac{81 \cdot 4\pi\rho_\oplus R_L^3}{5}.
\end{aligned}$$

Aplicando tercera ley de Kepler al sistema Tierra-Luna, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{GM_\oplus}{4\pi^2} \\
\frac{(221)^3}{T^2} &= \frac{81G\rho_\oplus}{5\pi} \\
\rho_\oplus &= \frac{(221)^3 \cdot 5\pi}{81GT^2} \\
\rho &= 5\,558.95\ \frac{kg}{m^3}.
\end{aligned}$$

3.5.20. Período de rotación de Júpiter

La luz solar tarda 8.33 *minutos* en llegar a la Tierra y 43.3 *minutos* en alcanzar Júpiter. Si $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$,

a)¿Cuál es el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol?

b)Si suponemos que las órbitas son circulares, ¿cuál es la masa del Sol?

Respuesta

a)Partiendo de la tercera ley de Kepler, se tiene que

$$\frac{T_\oplus^2}{T_J^2} = \frac{r_\oplus^3}{r_J^3},$$

donde $T_\oplus$ y T_J son, respectivamente, los períodos de rotación de la Tierra y de Júpiter; $r_\oplus$ y r_J son los correspondientes radios de las orbitas para la Tierra y Júpiter. Si las consideramos circulares, entonces,

$$T_J = \sqrt{\left(\frac{r_J}{r_\oplus}\right)^3 T_\oplus^2}.$$

Para calcular los radios r_J y $r_\oplus$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{r_J}{r_\oplus} &= \frac{ct_J}{ct_\oplus} = \frac{41.6\ min}{8.33\ min}\\ \frac{r_J}{r_\oplus} &= 4.99.\end{aligned}$$

Como $T_\oplus = 1$ año, entonces

$$\begin{aligned}T_J &= \sqrt{\left(\frac{r_J}{r_\oplus}\right)^3 T_\oplus^2}.\\ T_J &= \sqrt{(4.99)(1 \text{ a nos})^2}\\ T_J &= 11.14 \text{ años}.\end{aligned}$$

b) Considerando la órbita circular, se tiene que la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitacional, es decir,

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2},$$

donde M es la masa del Sol, m es la masa del planeta, r es el radio de su órbita, ω es la velocidad angular del planeta y G es la Constante de Gravitacón Universal. Por lo tanto, despejando la masa del Sol, M, se tiene que

$$\begin{aligned}m\omega^2 r &= \frac{GMm}{r^2}\\ \frac{m\theta^2 r}{t^2} &= \frac{GMm}{r^2}\\ \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{GM}{r}\\ M &= \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}\\ M &= \frac{4\pi^2(1.49\times 10^{11}\ m)^3}{(3.15\times 10^7\ s)^2(6.67\times 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2})}\\ M &= 1.97\times 10^{30}\ kg.\end{aligned}$$

3.5.21. Orbita de Júpiter alrededor del Sol

La distancia media del Sol a Júpiter es 5.2 UA. Por otro lado la distancia media de la Tierra al Sol es de 1 UA y el período de la Tierra alrededor del Sol es de 1 año ¿Cuál es el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol?

Respuesta

Utilizaremos la tercera ley de Kepler para relacionar el período de Júpiter con sus distancia media al Sol. La constante C que puede deducirse a partir de la distancia media al Sol del período de la Tierra, que son conocidos. Para la Tierra $T_T = 1$ *año* y la distancia media entre la Tierra y el Sol $R_T = 1\ UA$. Para Júpiter $R_J = 5.20\ UA$ y llamemos T_J a su período.

Aplicando la Tercera Ley de Kepler para relacionar el período de Júpiter T_J con su distancia media al Sol, R_J tenemos

$$T_J^2 = CR_J^3. \tag{3.75}$$

Por otra parte, aplicando la misma ley a la Tierra para determinar el valor de la constante C en función de T_T y R_T obtenemos

$$\begin{aligned} T_T^2 &= CR_T^3 \\ C &= \frac{T_T^2}{R_T^3}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Puesto que C es una constante, podemos sustituir la Ecuación (3.2) en la Ecuación (3.1) y despejar T_J:

$$\begin{aligned} T_J^2 &= CR_J^3 = \frac{T_T^2}{R_T^3} R_J^3 \\ T_J &= \sqrt{\left(\frac{R_J}{R_T}\right)^3} T_T \\ T_J &= \sqrt{\left(\frac{5.2\ UA}{1\ UA}\right)^3} \left(1 \text{ año}\right) \\ T_J &= 11.85 \text{ años}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

3.5.22. Satélite artificial

Un satélite se mueve en órbita circular alrededor de la Tierra con un período de 90 minutos. La distancia de la Luna a la Tierra es de 3.84×10^5 km, la órbita de la Luna es circular con un périodo de rotación de 27.32 días y el radio de la Tierra es de 6378 km. Calcula la distancia a la cual gira el satélite sobre la superficie de la Tierra.

Respuesta

Partiendo de la tercer ley de Kepler, denotando r_l y T_l el radio de la órbita y el período de la Luna respectivamente, tenemos

$$\frac{T_l^2}{r_l^3} = C.$$

Por otra parte, la tercera ley de Kepler debe también cumplirse para el satélite, siendo T_s y r_s el período y el radio de la órbita de dicho satélite, por lo tanto,

$$\frac{T_s^2}{r_s^3} = C.$$

Puesto que la ley de Kepler debe cumplirse para ambos satélites, la constante C es la misma para ambos, por lo tanto igualando y despejando r_s:

$$\begin{aligned}
\frac{T_l^2}{r_l^3} &= \frac{T_s^2}{r_s^3} \\
r_s &= \sqrt[3]{\frac{T_s^2}{T_l^2}} r_l \\
r_s &= \sqrt[3]{\frac{(0.0625 \text{ días})^2}{(27.32 \text{ días})^2}} \left(384\,401 \ km\right) \\
r_s &= 6\,670.3 \ km.
\end{aligned}$$

Para determinar la altura h, del satélite sobre la superficie de la Tierra tenemos

$$h = r_s - R_\oplus = 6670.3 \ km - 6378 \ km = 292.3 \ km.$$

Por lo tanto, dicho satélite se encuetra a 292.3 km por encima de la superficie de la Tierra.

3.6. Ejercicios Propuestos

3.6.1. Trayectoria de la Luna alrededor del Sol

Haz un dibujo de la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra tomando como referencia al Sol.

3.6.2. El Sol visto desde Plutón

En la órbita elíptica de un cuerpo alrededor del Sol se identifican particularmente dos puntos, el más cercano al Sol y el más lejano. El Afelio es la posición en la que el objeto está en el punto más alejando del Sol. La distancia del Sol a Plutón cuando éste se encuentra en su afelio es de 49,27 UA, además considera que el radio del Sol es igual a $6{,}96 \times 10^5 km$.

a) Calcula el diámetro angular del Sol que se observaría desde Plutón cuando éste se encuentra en su Afelio, considerando que 1 $UA = 1{,}5 \times 10^8\ km$.

b) La distancia entre Mercurio y el Sol es de 0,387 UA. Calcula la resolución angular que se requiere para distinguir a Mercurio del Sol si fuera observado desde Plutón en su Afelio.

3.6.3. Período de rotación de Fobos alrededor de Marte

Fobos es un satélite de Marte que gira alrededor de él en órbita circular de 14460 km de radio. Siendo 3393 km el radio del planeta Marte, y su gravedad superficial 0.38 veces la de la Tierra, determina el período orbital de Fobos.

3.6.4. Razón entre fuerzas

La distancia media entre la Tierra y el Sol es 400 veces la distancia de la Luna a la Tierra. Denotando la fuerza entre la Tierra y el Sol como F_0 y la fuerza entre la Tierra y la Luna como F_1. Si la masa de la Tierra es aproximadamente 81 veces la de Luna y la Masa del Sol es 332 946 veces la masa de la Tierra ¿cuál es la razón $\frac{F_0}{F_1}$?

3.6.5. Fuerza de gravedad y duración del día si la Tierra tuviera la mitad de su radio

Supón que por alguna causa interna, la Tierra reduce su radio a la mitad del actual. Sin embargo, conserva su masa. Considera que la aceleración debida a la fuerza de gravedad de la Tierra es $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$ y su frecuencia de giro $v = 1\frac{vuelta}{dia}$.
a) ¿Cuál sería la intensidad de la de la aceleración debida a la fuerza de gravedad de la Tierra en su nueva superficie?

b) ¿Cuál sería la nueva duración del día en horas?

3.6.6. Presión de una montaña sobre su base

Una montaña ejerce presión sobre su base. La ecuación que lo describe, dice que, dicha presión sobre la base aumenta, si aumenta la altura del material que carga la base de la montaña. Asi tenemos que

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{GM_p\rho}{R_p^2} \tag{3.78}$$

donde $G = 6{,}67 \times 10^{-11} m^3/kg \cdot s^2$ es la constante de Gravitación Universal, M_p, ρ y R_p son la masa, la densidad y el radio del planeta, respectivamente. Todo material tiene una resistencia a la compresión que se ejerce sobre él. Por ejemplo, una roca puesta en una prensa y a la cual se le va aumentando el nivel de presión, se rompe al momento de llegar a la presión crítica, P_c. En el caso de la montaña, la presión crítica, P_c, se alcanza para una altura máxima h_{max} en que la presión de todas las rocas de la montaña haría que se rompieran las rocas de la base. A partir de la ecuación anterior demuestra que

$$h_{max} = \frac{P_c R_p^2}{G M_p \rho}. \tag{3.79}$$

3.6.7. Período de rotación de Júpiter alrededor del Sol

La luz solar tarda 8.33 *minutos* en llegar a la Tierra y 43.3 *minutos* en alcanzar Júpiter. Si $G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$.

a) ¿Cuál es el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol?

b) Si suponemos que las órbitas son circulares, ¿cuál es la masa del Sol?

3.6.8. Velocidad de giro de un pulsar

Supongamos que observamos un pulsar y que cada pulso corresponde a una rotación. Entonces el período de rotación lo podemos estimar midiendo el tiempo entre dos pulsaciones. Supón que un pulsar gira con una frecuencia de 408 MHz, si su radio es de 10 km, determina

a) La velocidad lineal de un punto situado a una *latitud* de 45° con respecto al Ecuador de la estrella.

b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta en ese punto?

3.6.9. Aceleración debida a la fuerza de gravedad en la superficie de Júpiter

Determina el valor de la aceleración debida a la fuerza de gravedad de Júpiter, si su radio es $R_J = 71492$ km y su densidad media es $J = 1\,330 \ \frac{kg}{m^3}$. Considera el valor de la Constante Gravitacional $G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$.

3.6.10. Período de un satélite y distancia de la Tierra a la Luna

Sabiendo que la Luna da una vuelta a la Tierra en 27.3 días, ¿cuál será el período de un satélite que vuela a 10 000 km del centro de la Tierra? Considera que la distancia de la Tierra a la Luna es $3{,}8 \times 10^5 km$.

3.6.11. Aceleración debida a la fuerza de gravedad de la Luna

La masa de la Luna es de 1/81 de la masa de la Tierra y su radio es 1/4 del de la Tierra. ¿Cuál es la aceleración debida a la fuerza de gravedad sobre la superficie de la Luna?

3.6.12. Salto de un astronauta en la Luna

Un astronauta completamente equipado puede saltar 60 cm verticalmente sobre la superficie de la Tierra haciendo un esfuerzo máximo. Si el diámetro de la Luna es $\frac{1}{4}$ del de la Tierra y su densidad es $\frac{2}{3}$ la de la Tierra ¿a qué altura puede saltar el astronauta en la Luna?

3.6.13. Masa y radio de la Luna cuando estaba a 21 000 km de la Tierra

Durante la formación de la Luna se ha estimado que la fuerza que ejercía sobre la Tierra era 4000 veces la fuerza actual y que la Luna se encontraba a $21\,000 km$ de la Tierra. A través del tiempo la Luna se ha ido alejando de la Tierra, de tal manera que la distancia Tierra-Luna es de $384\,401 km$ y cuya masa actual es de $7{,}36 \times 10^{22} kg$. Con base en lo anterior, determina:

a)La masa de la Luna cuando se encontraba a 21 000 km de la Tierra.

b)Si la densidad de la Luna no cambió desde ese entonces, siendo de $3\,340\ \frac{kg}{m^3}$, ¿cuál era su radio en ese entonces?

3.6.14. Período de un péndulo en la Luna

El período T de un péndulo es el tiempo que tarda éste en realizar una oscilación completa (de ida y vuelta). El período se calcula con la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{3.80}$$

donde l es la longitud del péndulo y g es la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

Si consideramos que la aceleración debida a la fuerza de gravedad en la Luna es un sexto de la de la Tierra, ¿cuál deberá ser la longitud de un péndulo en la Luna, para que tenga el mismo período que en la Tierra?

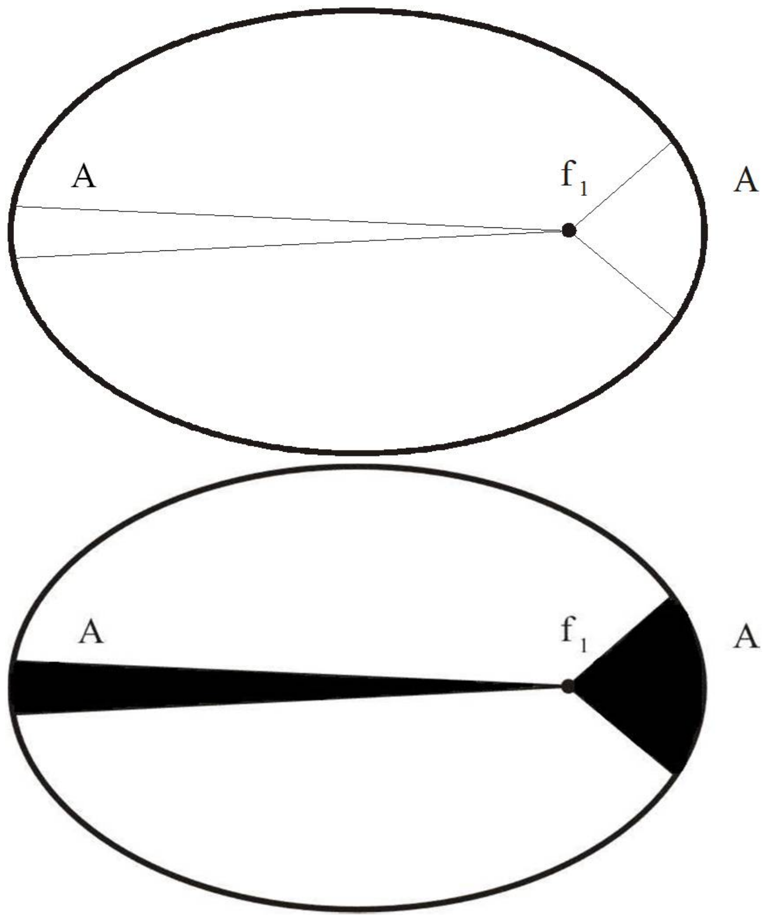

Figura 3.5: Representación de las áreas que barre un planeta en su órbita alrededor del Sol en tiempos iguales. La posición del Sol se representa con f_1, que es uno de los focos de la elipse. Si las áreas de la figura son las mismas entonces el trayecto de órbita que recorre el planeta cuando está más cerca es mayor que cuando está más lejos. Entonces, la velocidad del movimiento del planeta, en su órbita, es mayor cuando está más cerca del Sol que cuando está más lejos.

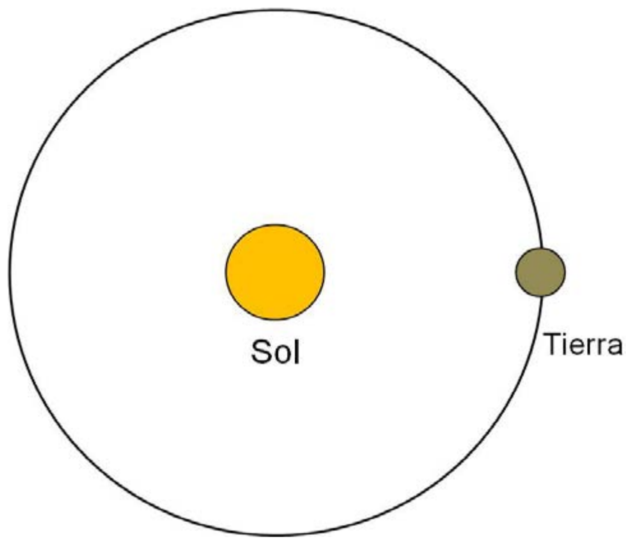

Figura 3.6: Orbita de la Tierra alrededor del Sol.

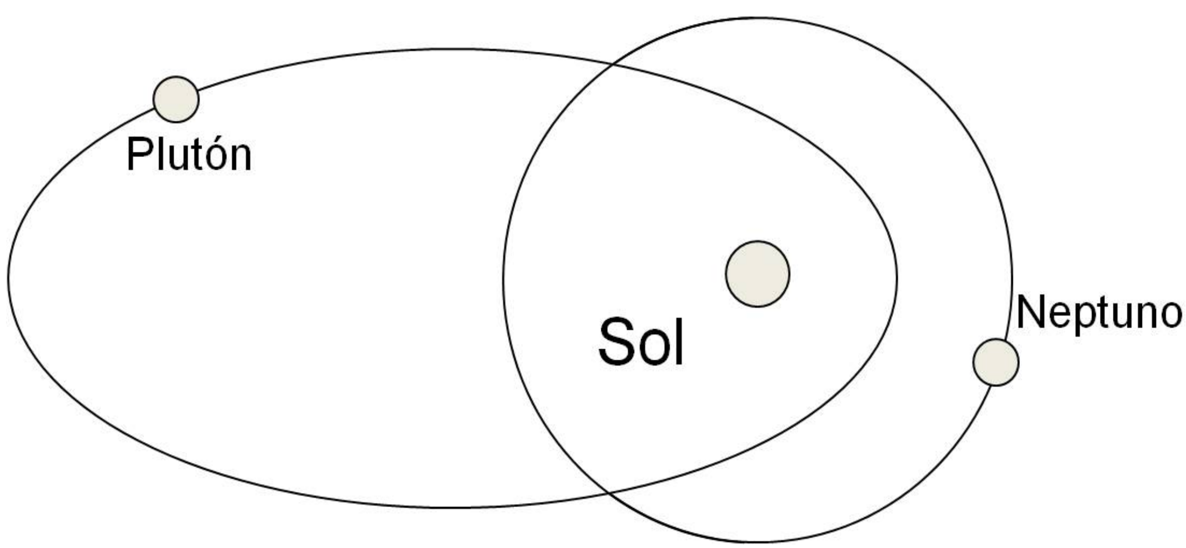

Figura 3.7: En esta figura se representa la órbita de Neptuno (línea punteada) que es casi circular. La elipse representa la órbita de Plutón (línea a trazos).

Figura 3.8: ¿Cómo medimos la masa de la Tierra?

Capítulo 4

Astronáutica

4.1. Energía potencial gravitacional

Cuando un objeto está a una altura h sobre el suelo tiene una energía potencial gravitacional. Esto significa que, debido a la fuerza de gravedad de un objeto que lo atrae, tiene acumulada cierta energía. Dicha energía se puede liberar simplemente dejándolo que caiga libremente. Así, al llegar al suelo tendrá una energía cinética o de movimiento igual a la energía potencial que acumuló al estar a una altura h.

Si el objeto se pone a una altura h la energía que acumula es

$$V_G = mgh \tag{4.1}$$

donde g es la aceleración sobre la superficie de la Tierra debida a la gravedad, h es la altura y G es la constante de la gravitación universal.

De la Ecuación 4.1 podemos ver que si tenemos un objeto a una distancia muy grande entonces acumulará mucha energía que se liberará al soltarlo y la velocidad con la que llegará al suelo será muy grande.

Sin embargo, la Ecuación 4.1 toma como referencia un piso sobre el cual está el objeto. Por ejemplo, si estamos en un séptimo piso y dentro de él dejamos caer un objeto sobre el suelo del mismo piso entonces la altura está referida al séptimo piso. También podemos soltar un objeto desde la ventana y entonces la referencia será el piso de la planta baja. si tuviéramos un pozo y soltamos un objeto dentro del pozo entonces la referencia sobre la que medimos h es el fondo del pozo.

Cuando consideramos la energía potencial con relación a la Tierra y no a una superficie dada se usa la siguiente expresión

$$V_G(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{4.2}$$

donde r es la distancia entre el objeto y el centro de la Tierra (es decir, su altura), G es la constante de Gravitación Universal y M es la masa de la Tierra.

4.2. Caída libre

Fue Galileo Galilei (1564-1642) el primero en deducir que en ausencia de fricción, es decir, eliminando la resistencia del aire, todos los cuerpos caen a la Tierra con la misma aceleración sin importar su masa.

En la vida diaria al soltar por ejemplo una esfera metálica y una pluma, ésta última tarda más tiempo en caer al suelo que la esfera metálica, éste hecho ¿depende de sus masas o no? Hasta aquí se ha omitido la resistencia del aire, sin embargo, ésta ofrece una resistencia al movimiento de los objetos y por ello se observa que uno cae más deprisa que otro. Galileo imaginó el mismo experimento pero en ausencia de la resistencia del aire y concluyó que ambos objetos caen al mismo tiempo, ¿por qué los objetos caen al mismo tiempo si son de diferente masa? La explicación radica en que los cuerpos más pesados son proporcionalmente más difíciles de ser acelerados, en nuestro ejemplo la esfera metálica es más difícil de ser acelerada que la pluma, ésta resistencia al cambio de movimiento es una propiedad de los cuerpos llamada inercia.

Durante mucho tiempo Galileo experimentó con la caída de objetos sobre planos inclinados así como en caída libre, de los cuales descubrió que al soltar los objetos en caída libre éstos aumentan su velocidad, es decir, se aceleran. Si el movimiento tiene una aceleración constante, se dice que el movimiento es uniformemente acelerado. El hecho de tener una aceleración cero significa que su velocidad no cambia y si no cambia ocurren dos cosas: el objeto se encuentra en reposo originalmente y seguirá estando en reposo ó bien el objeto se movía inicialmente con una velocidad y después de cierto tiempo continuará con la misma velocidad, es decir, la velocidad es constante. Cuando un objeto está en caída libre la aceleración del cuerpo se denomina aceleración debida a la gravedad ó aceleración de la gravedad y se expresa por la letra g. En la superficie de la Tierra ó cerca de ella es aproximadamente $9.8\ \frac{m}{s^2}$ y a medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra el valor de g tiende a disminuir.

4.3. Proyectiles lanzados desde la superficie de la Tierra

Los objetos que están en la superficie de la Tierra permanecen sobre ella debido a la fuerza de gravedad de ésta. Un objeto va a permanecer así mientras no haya alguna fuerza que se oponga a la fuerza de gravedad.

Si un objeto es lanzado hacia arriba, básicamente puede ocurrir alguna de las siguientes tres situaciones

1.- Llega a una altura h y regresa a la superficie de la Tierra.

2.- Se queda en órbita alrededor de la Tierra.

3.- Se libera de la atracción gravitacional de la Tierra y alejandose indefinidamente de ella.

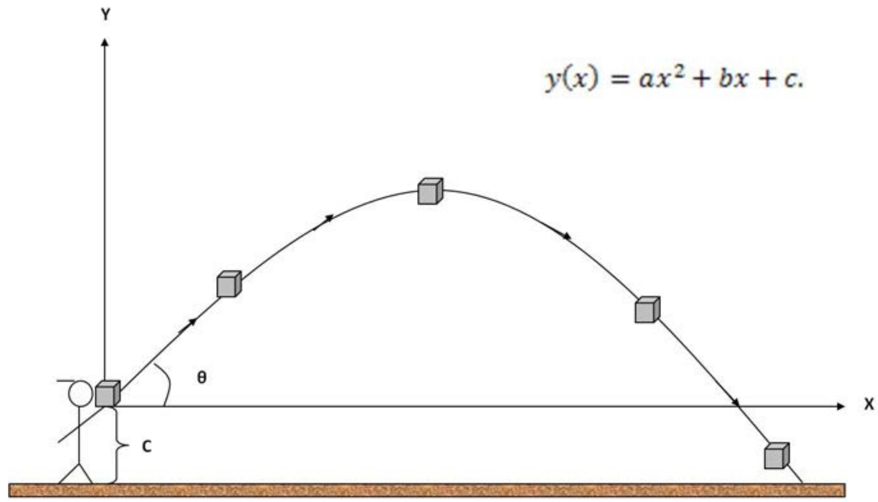

Figura 4.1: Trayectoria de un objeto lanzado desde una altura C sobre el suelo, con un ángulo θ por arriba de la horizontal.

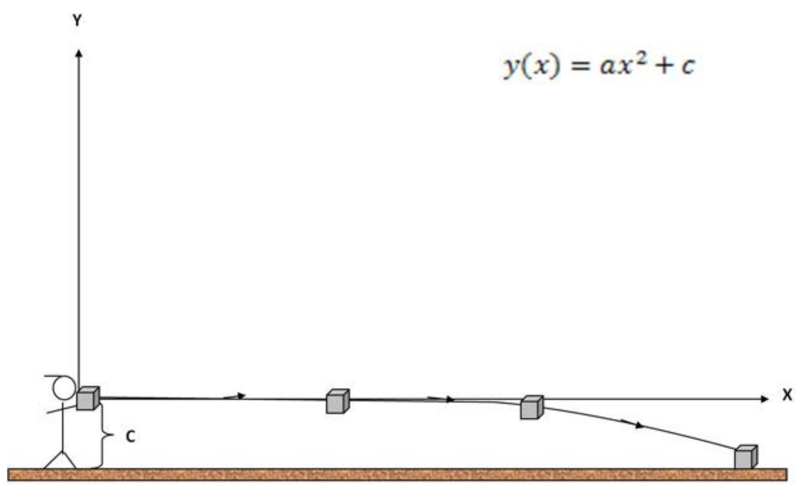

Figura 4.2: Trayectoria de un objeto lanzado a una altura C sobre el suelo, en dirección paralela a éste.

‘

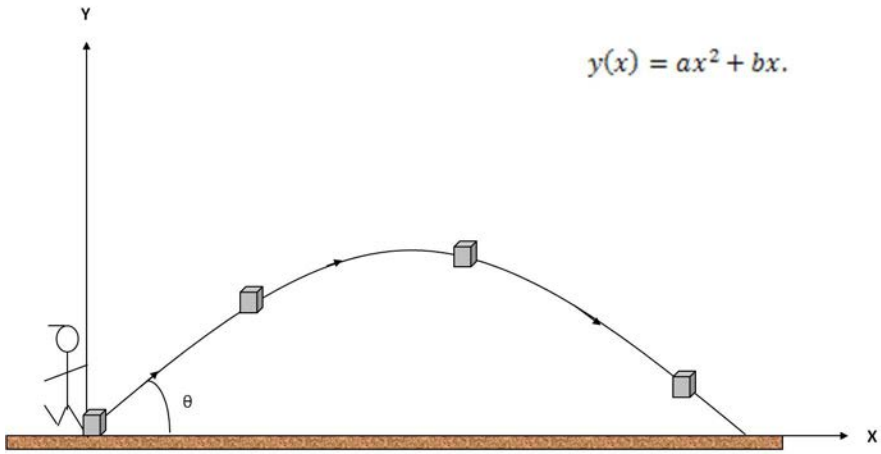

Figura 4.3: Trayectoria de un objeto lanzado desde el suelo, a un ángulo θ por arriba de la horizontal.

4.4. Tiro parabólico

Figura 4.1	$y(x) = ax^2 + bx + c$	Si el objeto es lanzado a una altura c sobre el suelo.
Figura 4.2	$y(x) = ax^2 + c$	Si el objeto es lanzado a una altura c sobre el suelo de forma horizontal.
Figura 4.3	$y(x) = ax^2 + bx$	Si el objeto es lanzado a nivel del suelo.

Si un proyectil (objeto) se lanza hacia arriba en una dirección diferente a la vertical en presencia de un campo gravitacional entonces el movimiento del proyectil se puede describir como la suma de dos movimientos, uno horizontal y otro vertical. El movimiento horizontal tiene velocidad constante mientras que el vertical es un movimiento acelerado. Como resultado de estos movimientos el proyectil puede seguir una trayectoria parabólica como las representadas en la Figuras 4.1, 4.2 y 4.3, donde se muestran ejes coordenados X, Y, de tal manera que la posicion y del proyectil está en función de x.

4.5. Ejercicios con respuesta

4.5.1. Período de rotación de la estación espacial internacional

La Tierra tiene una masa de $5.97 \times 10^{24} kg$ y su radio ecuatorial es de $6\,378\ km$. Si la estación espacial internacional orbita a una altura de $396\ km$ sobre la superficie de la Tierra. Determina el período de rotación de la estación espacial internacional. Considera que $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Respuesta

Dado que la velocidad orbital se puede calcular como

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad y \qquad \omega = \frac{\alpha}{T}.$$

La aceleración centrípeta es

$$\begin{aligned} a_c &= \omega^2 r \\ a_c &= \frac{\alpha^2}{T^2} r \\ a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \end{aligned}$$

Lo que retiene al satélite en órbita es la fuerza gravitacional, es decir $F = \frac{GM_\oplus m}{r^2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2 m r}{T^2} &= \frac{GM_\oplus m}{r^2} \\ \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} &= GM_\oplus \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 r^3}{GM_\oplus} \\ T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_\oplus}} \\ T &= 5\,551.3367\ s \end{aligned}$$

es decir, el período es alrededor de 92.52 minutos.

4.5.2. Velocidad de la estación espacial internacional

Si la estación espacial internacional se encuentra sometida a una aceleración de la gravedad de 8.68 $\frac{m}{s^2}$ a una altura de 396 km sobre la superficie de la Tierra, ¿a qué velocidad se desplazará dicha estación en órbita alrededor de la Tierra? Toma en cuenta que el radio de la Tierra es igual a 6 378 km.

Respuesta

Un objeto en movimiento circular a una velocidad v, tiene una aceleración a_c hacia el centro de su órbita con radio r. Así se tiene que

$$
\begin{aligned}
a_c &= \frac{v^2}{r} \\
g &= \frac{v^2}{r} \\
g &= \frac{v^2}{R_\oplus + r} \\
v &= \sqrt{g(R_\oplus + r)} \\
v &= 7\,668 \frac{m}{s}.
\end{aligned}
$$

4.5.3. Velocidad angular de un satélite artificial

Halla la velocidad angular de un satélite artificial de la Tierra que gira siguiendo una órbita circular con período de revolución de 88 minutos. También calcula la velocidad lineal del mismo satélite si se sabe que la altura a la que se encuentra de la superficie de la Tierra es de 200 km y que el radio de la Tierra es 6 378 km.

Respuesta

Dado que la velocidad angular, ω, y la velocidad lineal, v, se puede determinar como

$$\omega = \frac{\alpha}{T} \quad y \quad v = \omega r$$

donde α es el ángulo recorrido, en radianes, en un período T y r el radio de giro del objeto. El problema pide determinar la velocidad angular ω, tomando el período $T = 5\,280\ s$ al recorrer un ángulo de 2π, la velocidad angular es

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{\alpha}{T} \\
\omega &= \frac{2\pi}{5\,280\ s} \\
\omega &= 1.18999 \times 10^{-3}\ \frac{rad}{s}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, la velocidad lineal depende del radio de giro, que en este caso, es $r = 6\,378\ km + 200\ km = 6\,578\,000\ m$. La velocidad lineal es

$$
\begin{aligned}
v &= \omega r \\
v &= (1.18999 \times 10^{-3}\ rad/s)(6\,578\,000\ m) \\
v &= 7827.8\ \frac{m}{s}.
\end{aligned}
$$

4.5.4. Acelerción debida a la fuerza de gravedad de la Luna

En la superficie de la Luna, se dispara un objeto verticalmente hacia arriba. Se observa que el objeto se eleva a una altura seis veces mayor que la que se observa en la Tierra. ¿Cuál es la aceleración debida a la fuerza de gravedad de la Luna, en relación con la gravedad de la Tierra?

Respuesta

Consideramos como punto de partida la superficie de la Luna y la Tierra. Entonces, al disparar verticalmente hacia arriba, la aceleración de la gravedad será negativa. Partiendo de este hecho, tenemos que

$$2as = v_f^2 - v_0^2,$$

donde a es la aceleración de la gravedad, s la distancia, v_f y v_0 son la velocidad final e inicial, respetivamente. Si el objeto después de ser disparado a una velocidad v_0, alcanza su máxima altura cuando $v_f = 0$, entonces para la Tierra se tiene que

$$2g_\oplus h_\oplus = v_0^2. \tag{4.3}$$

Para el mismo objeto disparado a la misma velocidad, v_0, pero en la superficie de la Luna, se observa que $h_L = 6h_\oplus$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 2g_L h_L &= v_0^2 \\ 2g_L(6h_\oplus) &= v_0^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Debido a que las velocidades son las mismas, de la Ecuación (4.3) y la Ecuación (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} 2(6g_L h_\oplus) &= 2g_\oplus h_\oplus \\ g_L &= \frac{g_\oplus}{6} \end{aligned}$$

es decir, la aceleración de la gravedad de la Luna es una sexta parte de la que se experimenta en la Tierra.

4.5.5. Velocidad de giro de una estrella de neutrones

Si una estrella de neutrones tiene un radio de 20 km, determina:

a) Si a dicha estrella le lleva 4.3 *segundos* en completar una vuelta ¿cuál es la velocidad lineal y la aceleración centrípeta de ésta?

b)Si la estrella gira 1 000 veces por segundo ¿cuál es la velocidad lineal y la aceleración centrípeta de un punto situado en el ecuador de ella?

Respuestas

a) La estrella cubre un ángulo $\theta = 2\pi$ *radianes* por cada período T, por lo tanto, la longitud de arco es $s = 2\pi R_\star$. Entonces, partiendo de la definición de velocidad

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{T} \\ v &= \frac{2\pi R_\star}{T}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor del radio y el período, tenemos que

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi(20 \times 10^3\ m)}{4.3\ s} \\ v &= 29\,224.11\ \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Para hallar la aceleración, partimos de la definición

$$a = \frac{v^2}{R_\star} = \frac{4\pi^2 R_\star}{T^2}.$$

Sustituyendo el valor del radio y el período, se tiene que

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\pi^2 R_\star}{T^2} \\ a &= \frac{4\pi^2(20 \times 10^3\ m)}{(4.3\ s)^2} \\ a &= 42\,702\ \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

b) Ahora consideramos que la estrella gira 1 000 veces por segundo, es decir, completa un período $T = 1 \times 10^{-3}\ s$ y tiene un radio $R_\star = 20\ km$. La velocidad lineal es

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi(20 \times 10^3\ m)}{1 \times 10^{-3}\ s} \\ v &= 125 \times 10^6\ \frac{m}{s}, \end{aligned}$$

y la aceleración es

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\pi^2 R_\star}{T^2} \\ a &= \frac{4\pi^2(20 \times 10^3\ m)}{(1 \times 10^{-3}\ s)^2} \\ a &= 78.9 \times 10^{10}\ \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

4.5.6. Proyectil lanzado hacia un cráter en Marte

Supón que te encuentras sobre la superficie de Marte, donde $g = 3.71\ \frac{m}{s^2}$ y lanzas un objeto con un ángulo de inclinación de $30°$ sobre la horizontal con una velocidad inicial de $20\ \frac{m}{s}$. Si a 30 metros se encuentra un pequeño cráter de 2 metros de altura y el objeto pasa por arriba del mismo, ¿a qué altura sobre el cráter pasa el objeto?

Respuesta

La velocidad inicial tiene dos componentes, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 17.3\ \frac{m}{s}$ y $v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 10\ \frac{m}{s}$. Empleando la ecuación $x = v_{0x}t$, podemos determinar el tiempo que le toma al objeto en recorrer los 30 metros:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{30\ m}{17.3\ \frac{m}{s}} = 1.73s.$$

Se toma la dirección hacia arriba como positiva, por lo tanto, $g = -3.71\ \frac{m}{s^2}$. El desplazamiento vertical al paso de $t = 1.73\ s$ se determina a partir de

$$\begin{aligned} y &= v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 \\ y &= (10\ \frac{m}{s})(1.73\ s) - \frac{1}{2}(3.71\ \frac{m}{s^2})(1.73\ s)^2 \\ y &= 11.74m \end{aligned}$$

es decir el objeto pasa a $11.74\ m$ por encima del cráter.

4.5.7. Tiro parabólico en la superficie de Venus

Supón que te encuentras sobre la superficie de Venus, la cual tiene una aceleración de la gravedad de 0.9 la de la Tierra, entonces disparas un proyectil con una velocidad de $30\ \frac{m}{s}$ a un ángulo de 30^0 sobre la horizontal. El proyectil se eleva y golpea con el borde de un cráter de 8 metros de altura.

a) ¿Cuál es el tiempo que le toma al objeto en golpear al cráter desde que fue disparado?

b)¿A qué distancia se encuentra dicho cráter?

Respuesta

a) La altura máxima alcanzada se da cuando $v_f = 0$, siendo así

$$\begin{aligned} -v_0^2 &= -2gy \\ y &= \frac{v_0^2}{2g} \\ y &= 12.75\ m. \end{aligned}$$

b) Ahora se determina el tiempo de vuelo a partir de

$$\begin{aligned} 2y &= 2v_{oy}t - gt^2 \\ gt^2 - 2v_{oy}t + 2y &= 0 \\ t_1 = 0.66\ s \quad y &\quad t_2 = 2.73\ s. \end{aligned}$$

Pueden pasar dos cosas, que el cráter se encuentre antes de alcanzar su altura máxima o bien, que se encuentre después. Si el cráter se encuentra antes de alcanzar su altura máxima, entonces

$$\begin{aligned} x &= v_0 cos\alpha \times t_1 \\ x &= 17.14\ m. \end{aligned}$$

Si el cráter se encuentra después de alcanzar su altura máxima, entonces

$$\begin{aligned} x &= v_0 cos\alpha \times t_2 \\ x &= 71\ m. \end{aligned}$$

4.5.8. Velocidad y distancia recorrida por un objeto en caída libre en el vacío

Supón que se deja caer un objeto desde una cierta altura, como se muestra en la Figura (4.4). Cuando el objeto se deja caer su velocidad es cero, a medida que transcurre el tiempo va aumentando su velocidad de tal manera que cuando pasa por el punto A lleva una velocidad v_0 y cuando pasa por el punto B lleva una velocidad v, que es mayor a v_0. Supongamos que conocemos el tiempo (t) que le toma en ir del punto A hacia el punto B y la velocidad con la cual pasa por el punto A.

a) ¿Cuál es la velocidad que lleva justo cuando pasa por el punto B?

b) ¿Cuál es la distancia que ha recorrido en el tiempo t?

Respuesta

a) Partiendo de la segunda ley de Newton, el objeto de masa m es atraído a la superficie de la Tierra con una aceleración debida a la gravedad de $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$. Por otra parte, la aceleración se define como $a = \frac{dv}{dt}$, así

$$\begin{aligned} ma &= mg \\ \frac{dv}{dt} &= g. \end{aligned}$$

Integrando de ambos lados es posible hallar la velocidad que lleva justo cuando pasa por el punto B. Cuando pasa por el punto A el objeto lleva una velocidad v_0 y es el momento en el que inicia el tiempo de medición que le toma en ir del punto A hacia el B, por lo tanto $t_0 = 0$.

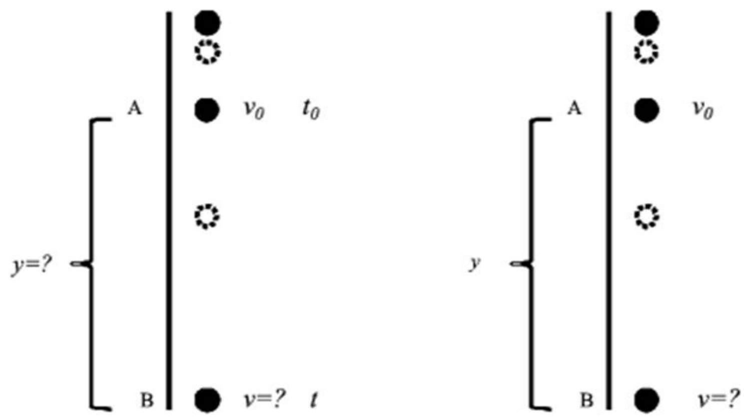

Figura 4.4: Caída libre: **a)** Velocidad final y distancia recorrida en función de la velocidad inicial y el tiempo.**b)** Velocidad final en función de la distancia recorrida y de la velocidad inicial.

Cuando llega al punto B a transcurrido un tiempo t, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{v_0}^{v} dv &= \int_{t_0}^{t} g dt \\
\int_{v_0}^{v} dv &= g \int_{t_0}^{t} dt \\
v|_{v_0}^{v} &= gt|_{t_0=0}^{t} \\
v - v_0 &= gt \\
v &= v_0 + gt.
\end{aligned}$$

b) Una vez calculada la velocidad, podemos hallar la distancia recorrida del punto A hacia el punto B integrando la ecuación de la velocidad. Cuando el objeto pasa por el punto A, que es el punto donde inicia la medición de la distancia recorrida, $y_0 = 0$ en un tiempo $t_0 = 0$. Por otra parte, la velocidad se define como $v = \frac{dy}{dt}$, por lo tanto, la distancia recorrida está dada por

$$
\begin{aligned}
v &= v_0 + gt \\
\frac{dy}{dt} &= v_0 + gt \\
\int_{y_0}^{y} dy &= \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} gtdt \\
\int_{y_0}^{y} dy &= v_0 \int_{t_0}^{t} dt + g \int_{t_0}^{t} tdt \\
y|_{y_0=0}^{y} &= v_0 t|_{t_0=0}^{t} + \frac{1}{2} gt^2|_{t_0=0}^{t} \\
y &= v_0 t + \frac{1}{2} gt^2.
\end{aligned}
$$

4.5.9. Cálculo de la velocidad de un objeto en caída libre desde una altura h

Supón que se tiene la situación del Ejercicio 4.5.8 con la diferencia de que sólo se conoce la velocidad v_0 cuando pasa por el punto A y la distancia y recorrida al pasar por los puntos A y B (Figura 4.4b).¿Qué velocidad lleva el objeto justo cuando pasa por el punto B?

Respuesta

Nuevamente partimos de la segunda ley de Newton

$$
\begin{aligned}
ma &= mg \\
\frac{dv}{dt} &= g.
\end{aligned}
$$

Si integramos la ecuación anterior, nos enfrentamos a integrar respecto al tiempo y éste no se conoce. Se mencionó que sólo se conoce la distancia recorrida entre el punto A y B, por lo tanto, será necesario integrar respeto de y. Multiplicando la ecuación anterior por $1 = \frac{dy}{dy}$ y recordando que $v = \frac{dy}{dt}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= g \\
\frac{dy}{dy}\frac{dv}{dt} &= \frac{dy}{dt}\frac{dv}{dy} = g \\
v\frac{dv}{dy} &= g \\
\int_{v_0}^{v} v dv &= \int_{y_0}^{y} g dy \\
\int_{v_0}^{v} v dv &= g\int_{y_0}^{y} dy \\
\frac{1}{2}v^2 \mid_{v_0}^{v} &= gy|_{y_0=0}^{y} \\
\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) &= gy \\
\frac{v^2 - v_0^2}{2} &= gy \\
v^2 - v_0^2 &= 2gy \\
v^2 &= 2gy + v_0^2.
\end{aligned}$$

4.5.10. Ejercicios Propuestos

4.5.11. Proyectil en Plúton

Un astronauta se encuentra sobre la superficie de Mercurio y dispara un proyectil con una velocidad inicial de 300 $\frac{m}{s}$. Su objetivo es golpear un blanco situado a una distancia horizontal de 1000 *metros* de él y a una altura de 300 metros. Si la aceleración de la gravedad en Mercurio es $g = 3.7\frac{m}{s^2}$ ¿cuál es el ángulo de disparo para golpear el blanco?

4.5.12. Aceleración de la gravedad

Determina la aceleración de la gravedad que sienten los astronautas de la estación internacional si ésta se encuentra a 396 km sobre la superficie de la Tierra. El radio de la Tierra es de 6378 km y su masa es 5.97×10^{24} kg, considera que $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

4.5.13. Telescopio Hubble

El telescopio Hubble se encuentra orbitando a 6 00 km sobre la superficie de la Tierra. Si la masa de la Tierra es de 5.97×10^{24} kg y su radio ecuatorial es 6 378 km, determina cuál es la velocidad con que viaja el telescopio alrededor de la Tierra, considera que $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

4.5.14. Cálculo de la distancia de un satélite a partir de su período

Un satélite se mueve en órbita circular alrededor de la Tierra con un período de 90 minutos. La distancia de la Luna a la Tierra es de 3.84×10^5 km, la órbita de la Luna es circular con un período de rotación de 27.32 días y el radio de la Tierra es de 6378 km. Calcula la distancia a la cual gira el satélite sobre la superficie de la Tierra.

4.5.15. Satélite que pasa dos veces al día por una misma ciudad

Supón que hay un satélite que pasa dos veces por día sobre una misma ciudad, que está en el ecuador. Si el radio de la Tierra es 6378 km y la aceleración debida a la gravedad es 9.8 $\frac{m}{s^2}$, ¿cuál es el radio de la órbita de dicho satélite?

4.5.16. Fuerza ejercida sobre las cuerdas de un paracaídas

Un paracaidista de 70 kg de peso, partiendo del reposo se deja caer libremente al espacio, al cabo de 5 *segundos* después del instante de su lanzamiento se abre su paracaídas. Éste tarda en abrirse por completo, 1 *segundo* y la velocidad pasa a 12 $\frac{m}{s}$ ya totalmente abierto. Suponiendo que el paracaídas carece de peso, ¿cuál es la fuerza media ejercida sobre las cuerdas de éste?

4.5.17. Altura de un globo del cual cae un objeto

Supón que te encuetras en Marte y ves que desde un globo se deja caer un cuerpo que tarda en llegar a la superficie marciana 20 segundos. ¿Cuál es la altura del globo si está ascendiendo a una velocidad de 50 $\frac{m}{s}$? Considera que la aceleración de la gravedad sobre Marte es 3.7 $\frac{m}{s^2}$.

Capítulo 5

Magnitudes estelares

5.1. Flujo

Generalmente se utiliza la palabra flujo para referirse a la densidad de flujo. El flujo que registra un observador, en una longitud de onda dada, es la potencia (o energía por unidad de tiempo) recibida por unidad de área. Estrictamente hablando, deberíamos decir potencia radiativa, porque es la potencia de la luz radiada por un objeto que capta el observador por unidad de área. Las unidades del flujo son $[F] = \frac{erg}{s \cdot cm^2}$. El flujo total es el flujo recibido por un observador en todas las longitudes de onda.

5.2. Luminosidad

La luminosidad (L) de una estrella es la cantidad de energía por segundo que emite dicha estrella ($erg\ s^{-1}$). La luminosidad está relacionada al *flujo* (F) por $L = 4\pi R^2 F$, donde R es el radio de la estrella.

5.3. Magnitudes

La magnitud es un parámetro que se emplea en Astronomía para cuantificar el brillo de un objeto celeste. El término de magnitud fue introducido por Hiparco en el siglo II a.C., quien construyó una escala de magnitudes basada en los objetos visibles a simple vista; asignó a las estrellas más brillantes una magnitud 1 y a las más débiles una magnitud 6.

El problema de la clasificación de Hiparco reside en que el "brillo" no tenía una expresión en función de parámetros físicos. En 1856, Norman R. Pogson propuso un método similar en el cual en vez de brillo se usa el flujo que recibe el observador. Pogson definió una escala en la que $F_1 = 100 \times F_6$, donde F_1 es el flujo de una estrella de magnitud 1 y F_6 es el flujo de una estrella de magnitud 6. Una de las unidades fundamentalmente utilizadas en magnitudes es el *parsec (pc)* (Consultar Glosario).

5.3.1. Magnitud aparente

La *magnitud aparente*, m_1, se refiere al brillo observado de un objeto celeste, es decir, el *flujo* F_1 que recibimos de dicho objeto ($F = [erg\ s^{-1}\, cm^{-2}]$). La *magnitud aparente* se define como

$$m_1 - m_0 = -\frac{5}{2} \log\big(\frac{F_1}{F_0}\big), \tag{5.1}$$

donde F_0 es el *flujo* de referencia, el cual corresponde a una estrella de *magnitud aparente* cero.

5.3.2. Magnitud absoluta

La *magnitud absoluta* es la que tendría una estrella si estuviera situada a una distancia de 10 pc ($parsecs$), la cual está dada por

$$m - M = 5 \log\big(\frac{r}{10\ pc}\big), \tag{5.2}$$

donde m y M son las *magnitudes aparente* y *absoluta*, respectivamente, y r es la distancia a dicho objeto en unidades de $parsecs$.

5.3.3. Constantes 2,512 y 2,5

Para no confundir los valores 2.512 y 2.5, que aparecen en varias ecuaciones anteriores, vamos a revisar brevemente su origen. Primero si tenemos que

$$x = 10^{\frac{5}{2}} = 2{,}512$$

,donde x es el cociente entre el flujo para magnitud m y el flujo para *magnitud* $m+1$, entonces

$$x = \frac{F_m}{F_{m+1}}.$$

Por otro lado, tenemos que $2.5 = \frac{5}{2}$. Este es un factor que proviene del exponente $(\frac{2}{5})$ del 10 en la definición de x, el cual se invirtió al despejar m.

5.4. Ejercicios con respuesta

5.4.1. Definición de magnitud aparente de Pogson

a) Demuestra que los *flujos* de dos estrellas, cuyas *magnitudes* de acuerdo a la definición de Pogson son m y $m+1$, están relacionados por

$$F_m = 2.512 \times F_{m+1}. \tag{5.3}$$

b) Demuestra que la relación entre el *flujo* de una estrella de *magnitud* cero (F_o) y una de *magnitud* m (F_m) es

$$F_o = (2.512)^m F_m. \tag{5.4}$$

c) Demuestra que la *magnitud* m se puede expresar como

$$m = -2.5\ log\left(\frac{F_m}{F_o}\right). \tag{5.5}$$

d) La *magnitud aparente* del Sol es aproximadamente -26 mientras que la de Sirio es aproximadamente -1.5. ¿En qué proporción es mayor el flujo que recibimos del Sol, en relación al que recibimos de Sirio?

Respuestas

a) Para entender la relación entre las diferentes *magnitudes* veamos la relación que hay entre los *flujos* correspondientes a ellas. El cociente entre el flujo para una *magnitud* m y el flujo para $m+1$ lo vamos a denotar por x.

El flujo correspondiente a *magnitudes* de 1 a 5 lo expresamos en el Cuadro 5.1 en términos del flujo correspondiente a la *magnitud* 6.

Cuadro 5.1: *Relación entre diferentes magnitudes y sus flujos.*

Magnitud (m)	*Flujo*	*Equivalencias*
1	F_1	$= xF_2 = x^5F_6$
2	F_2	$= xF_3 = x^4F_6$
3	F_3	$= xF_4 = x^3F_6$
4	F_4	$= xF_5 = x^2F_6$
5	F_5	$= xF_6$
6	F_6	$= F_6$

De acuerdo a la definición de Pogson,

$$F_1 = 100F_6. \tag{5.6}$$

Y tomando la última igualdad del primer renglón del Cuadro 5.1,

$$F_1 = x^5F_6, \tag{5.7}$$

tenemos que $x^5 = 100 = 10^2$ y, entonces, $x = 10^{2/5}$, de donde resulta que:

$$x = 2.512.$$

b) Ahora vamos a usar el flujo correspondiente a *magnitud* cero, al que denotaremos F_o. Si expresamos F_o en función de F_1 tenemos que $F_o = xF_1$ y entonces,

$$F_o = x(x^5F_6) = x^6F_6. \tag{5.8}$$

A partir de la relación $F_o = xF_1$ también podemos encontrar la relación entre el *flujo* correspondiente a *magnitud* cero, F_o, y el flujo correspondiente a cualquier *magnitud* de las dadas en el cuadro anterior. Así vemos que el flujo para la it magnitud aparente cero m_0 y el flujo para *magnitud aparente* m, F_m, están relacionados por

$$F_o = x^m F_m. \tag{5.9}$$

c) De la ecuación anterior se sigue que

$$log\left(\frac{F_o}{F_m}\right) = log(x^m). \tag{5.10}$$

El segundo miembro de la igualdad se puede escribir como

$$m\ log(x) = m\ log(10^{\frac{2}{5}}) = \frac{2}{5}\ m. \tag{5.11}$$

Entonces la ecuación (5.10) se puede escribir como

$$m = \frac{5}{2}\ log\left(\frac{F_o}{F_m}\right), \tag{5.12}$$

e intercambiando los miembros del cociente en el argumento del logaritmo resulta que

$$m = -2.5\ log\left(\frac{F_m}{F_o}\right). \tag{5.13}$$

Esta expresión es muy usada en Astronomía y es conveniente tenerla presente para los siguientes problemas.

d) Tenemos que la relación entre magnitud y flujo está dada por

$$m = -2.5\ log\left(\frac{F_m}{F_o}\right), \tag{5.14}$$

así que para el flujo del Sol ($F_\odot$) y el de Sirio (F_S), respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} -26 &= -2.5\ log\left(\frac{F_\odot}{F_o}\right) \\ \text{y } -1.5 &= -2.5\ log\left(\frac{F_S}{F_o}\right), \end{aligned}$$

de donde resultan

$$F_\odot = F_o \times 10^{10.4} \tag{5.15}$$

y

$$F_S = F_o \times 10^{0.6}. \tag{5.16}$$

Dividiendo la Ecuación (5.15) entre la Ecuación (5.16) tenemos que

$$F_{\odot} = F_S \times 10^{-0.6} \times 10^{10.4} = F_S \times 10^{9.8}. \tag{5.17}$$

Sirio es una estrella mucho más brillante que el Sol. Sin embargo, vemos del resultado anterior, que el flujo radiativo (es decir, de luz) que recibimos del Sol es $10^{9.8}$ veces mayor que el que recibimos de Sirio. Esto se debe a que estamos mucho más cerca del Sol que de Sirio.

5.4.2. Magnitud absoluta de Sirio a partir de su magnitud aparente y su distancia

Sirio está a una distancia de la Tierra de 8.6 Años Luz ($A.L.$) y tiene una *magnitud aparente* de -1.46. ¿Cuál es su *magnitud absoluta*?

Respuesta

Partimos de la definición de *magnitud absoluta*

$$m - M = 5\log\left(\frac{r}{10\ pc}\right) \tag{5.18}$$

donde m y M son la *magnitud aparente* y *absoluta* de la estrella, respectivamente y r la distancia a la que se encuentra dicha estrella. Por otra parte, sabemos que Sirio se encuentra a 8.6 años luz, por lo que debemos pasarlo a unidades de parsec, es decir

$$\left(\frac{8.6\ a.l.}{1}\right)\left(\frac{0.3066\ pc}{1\ al}\right) = 2.6367\ pc.$$

Así, la *magnitud absoluta* de Sirio se determina a partir de la ecuación (5.18):

$$\begin{aligned} m - M &= 5\log\left(\frac{r}{10\ pc}\right) \\ -1.46 - M &= 5\log\left(\frac{2.6367\ pc}{10\ pc}\right) \\ M &= 2.8946 - 1.46 \\ M &= 1.4346. \end{aligned}$$

5.4.3. Magnitudes absolutas y densidades de flujo de Betelgeuse y Procyón

La *magnitud aparente* de la estrella Betelgeuse es 0.77,mientras que la de Procyón es de 0.48. Determina:

a)¿Cuántas veces es mayor la *densidad de flujo* de Betelgeuse que la que nos llega de Procyón?

b)Las distancias de Betelgeuse y Procyón son 131.06 *pc* y 3.2 *pc*, respectivamente. ¿Cuáles son sus las *magnitudes absolutas*?

Respuesta

Partimos de

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2}\log\left(\frac{F_1}{F_2}.\right).$$

Si m_b y m_p son las *magnitudes aparentes* de Betelgeuse y Procyón, respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
m_b - m_p &= -\frac{5}{2}\log\left(\frac{F_b}{F_p}\right) \\
(0.77 - 0.48) &= -\frac{5}{2}\log\left(\frac{F_b}{F_p}\right) \\
-0.116 &= \log\left(\frac{F_b}{F_p}\right) \\
10^{-0.116} &= \left(\frac{F_b}{F_p}\right) \\
F_b &= 0.7656 F_p.
\end{aligned}$$

b) Las *magnitudes absolutas* de Betelgeuse y Procyón son

$$\begin{aligned}
m_b - M_b &= 5\log\left(\frac{131.06\ pc}{10\ pc}\right) \\
M_b &= 5\log\left(\frac{131.06\ pc}{10\ pc}\right) + 0.77 \\
M_b &= 6.35.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
m_p - M_p &= 5\log\left(\frac{3.21\ pc}{10\ pc}\right) \\
M_p &= -5\log\left(\frac{3.21\ pc}{10\ pc}\right) + 0.48 \\
M_p &= -1.98.
\end{aligned}$$

5.4.4. Distancias a ζ Per y ε Efer

Las estrellas ζ Per y ε Efer tienen *magnitudes absolutas* -4.54 y -3.23, respectivamente, y tienen *magnitudes aparentes* iguales. Demuestra que ζ Per es más distante que ε Efer.

Respuesta

Para la estrella ζ *Per* se tiene que

$$m_\zeta = 5\log\left(\frac{r_\zeta}{10\ pc}\right) + M_\zeta. \tag{5.19}$$

Para la estrella ε Efer se tiene que

$$m_\varepsilon = 5\log\left(\frac{r_\varepsilon}{10\ pc}\right) + M_\varepsilon. \tag{5.20}$$

Puesto que las estrellas ζ *Per* y ε *Efer* tienen la misma *magnitud aparente*, se tiene a partir de la Ecuación (5.19) y de la Ecuación (5.20) que

$$\begin{aligned}
5\log\left(\frac{r_\zeta}{10\ pc}\right) + M_\zeta &= 5\log\left(\frac{r_\varepsilon}{10\ pc}\right) + M_\varepsilon \\
5\log\left(\frac{r_\zeta}{10\ pc}\right) - 5\log\left(\frac{r_\varepsilon}{10\ pc}\right) &= M_\varepsilon - M_\zeta \\
5\log\left(\frac{r_\zeta}{r_\varepsilon}\right) &= M_\varepsilon - M_\zeta.
\end{aligned}$$

Sustituyendo las *magnitudes absolutas* y despejando r_ζ, se tiene que

$$\begin{aligned}
r_\zeta &= r_\varepsilon 10^{\frac{(M_\varepsilon - M_\zeta)}{5}} \\
r_\zeta &= r_\varepsilon 10^{\frac{(-3.23+4.54)}{5}} \\
r_\zeta &= 1.82\ r_\varepsilon.
\end{aligned}$$

5.4.5. Magnitud aparente de una estrella variable a partir de su densidad de flujo

Supongamos que la *densidad de flujo* de una estrella es F_1 y su *magnitud aparente* es m_1. Si después de cierto tiempo el *flujo* aumenta a $F_2 = 2F_1$, siendo m_2 su respectiva *magnitud aparente*, demuestra que la *magnitud aparente* m_2 es

$$m_2 = m_1 - \frac{5}{2}\log(2).$$

Respuesta

Para la estrella de *magnitud* m_1 se tiene que

$$m_1 = -\frac{5}{2}\log\left(\frac{F_1}{F_0}\right). \tag{5.21}$$

Después del aumento se tiene que la nueva *magnitud* es

$$m_2 = -\frac{5}{2}\log\left(\frac{F_2}{F_0}\right).$$

Considerando que $F_2 = 2F_1$, se tiene que la ecuaciónanterior se transforma en

$$\begin{aligned}
m_2 &= -\frac{5}{2}\log\left(\frac{2F_1}{F_0}\right) \\
m_2 &= -\frac{5}{2}\Bigg[\log(2) + \log(F_1) - \log(F_0)\Bigg] \\
m_2 &= -\frac{5}{2}\log(2) - \frac{5}{2}\Bigg[\log(F_1) - \log(F_0)\Bigg] \\
m_2 &= -\frac{5}{2}\log(2) - \frac{5}{2}\ log\left(\frac{F_1}{F_0}\right).
\end{aligned}$$

La expresión $-\frac{5}{2}\log\left(\frac{F_1}{F_0}\right)$ es la Ecuación (5.21), por lo tanto

$$m_2 = -\frac{5}{2}\log(2) + m_1$$

$$m_2 = m_1 - \frac{5}{2}\log(2).$$

5.4.6. Ejercicios Propuestos

5.4.7. Magnitudes aparentes de dos estrellas y el brillo que ve un observador

Un observador en la Tierra ve una estrella cuya *magnitud aparente* es 4 y también ve otra estrella cuya *magnitud aparente* es 1. Para este observador, ¿cuál de las dos estrellas es más brillante?

5.4.8. Magnitud aparente y flujo de referencia

La *magnitud aparente* de una estrella es

$$m_1 = -\frac{5}{2}log\left(\frac{F_1}{F_0}\right) \tag{5.22}$$

donde F_1 es su densidad de flujo y F_0 es la densidad de flujo de referencia. La *magnitud aparente* de otra estrella es

$$m_2 = -\frac{5}{2} log\left(\frac{F_2}{F_0}\right). \tag{5.23}$$

Demuestra que

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} log\left(\frac{F_1}{F_2}\right). \tag{5.24}$$

5.4.9. Magnitud aparente del Sol si estuviera a 1.3 *pc*

La *magnitud aparente* del Sol es $m = -26{,}78$.

a) ¿Qué *magnitud aparente* tendría el Sol si estuviese a la distancia de la estrella Centauri, que es de 1.3 *pc*?

b) ¿Hasta qué distancia lo podríamos ver si la magnitud límite del ojo es 6?

5.4.10. Magnitud aparente de una estrella triple

Una estrella con *magnitud aparente* $m = 0$ resulta ser en realidad una estrella triple. Dos de sus componentes tienen *magnitudes* 1 y 2. ¿Cuál es la magnitud de la tercera estrella?

5.4.11. Magnitud aparente de una estrella binaria

Si las componentes aparentes de una estrella binaria son 1 y 2, ¿cuál es la *magnitud* total aparente de la estrella?

5.4.12. Magnitud aparente del Sol y su temperatura efectiva

La *magnitud aparente* del Sol es $m = -26{,}81$. Si la *temperatura efectiva* de su superficie aumentara un 20 %, ¿cuál sería la *magnitud aparente* del Sol?

5.4.13. Magnitud aparente del Sol y su magnitud absoluta

La *magnitud aparente* del Sol es $m = -26{,}81$ y su distancia a la Tierra es 1 UA, calcula su *magnitud absoluta*, M.

5.4.14. Distancia a Andrómeda a partir de la magnitud absoluta y magnitud aparente de una Cefeida

Determina la distancia a la que se encuentra la galaxia Andrómeda, si en ella se encuentra la estrella Cefeida de *magnitud absoluta* $M = -5{,}51$ y *magnitud aparente* $m = 18{,}21$.

5.4.15. Distancia a una estrella y su magnitud absoluta

La *magnitud aparente* de una estrella es $m = -3{,}21$ y ésta se encuentra a 56 500 años luz de distancia. ¿Cuál es su *magnitud absoluta*?

5.4.16. Magnitud aparente y Magnitud absoluta de una supernova en Andrómeda

La *magnitud absoluta* de una estrella de la galaxia de Andrómeda, que dista de la Tierra a 690 *kpc*, tiene una *magnitud absoluta* $M = 5$. Dicha estrella explota como una supernova, resultando 10^9 veces más brillante tras la explosión. ¿Cuál es ahora su *magnitud aparente*?

5.4.17. Magnitud aparente de la Luna, magnitud absoluta del Sol y densidades de flujo

La *magnitud aparente* de la Luna es $-12{,}5$ y la *magnitud absoluta* del Sol es 4,76, el cual se encuentra a 1 UA de la Tierra. ¿Cuántas veces la *densidad de flujo* del Sol es el de la Luna?

5.4.18. Magnitudes aparentes de Sirio y Procyón

La *magnitud aparente* de la estrella Sirio es $-1{,}58$, mientras que la de Procyón es de 0.48, determina

a) ¿Cuántas veces es mayor la *densidad de flujo* de Sirio que la de Procyón?

b) Las distancias de Sirio y Procyón son 2.7 y 3.2 pc, respectivamente. ¿Cuáles son sus *magnitudes absolutas*?

5.4.19. Magnitud aparente y magnitud absoluta de una estrella

La distancia a una estrella es $r = 100$ *pc* y su *magnitud aparente* es $m = 6$. ¿Cuál es su *magnitud absoluta*?

5.4.20. Magnitud bolométrica de una estrella y su radio

La magnitud bolométrica se mide a partir de la emisión de una estrella en todas las longitudes de onda. Esta puede ser *magnitud aparente* m_{bol} o *magnitud absoluta* M_{bol}.

La *magnitud bolométrica absoluta* puede ser expresada en términos de la luminosidad como

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -\frac{5}{2} log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \tag{5.25}$$

donde L es la *luminosidad* de la estrella y $L_\odot$ es la *luminosidad* del Sol. La *luminosidad* se define como $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$ siendo $\sigma = 5{,}67 \times 10^8 \frac{W}{m^2K^4}$, R el radio de la estrella en metros y T la *temperatura efectiva* de la misma en *grados Kelvin*. Supongamos que la *temperatura efectiva* de una estrella es 12000 K y su *magnitud bolométrica absoluta* es de 00. Encuentra el radio de la estrella en función del radio del Sol, $R_\odot$, si la *temperatura efectiva* del Sol es de 5800 K y su *magnitud bolométrica absoluta* es 47.

5.4.21. Magnitud bolométrica absoluta del Sol y magnitud aparente bolométrica de Sirio

La *magnitud bolométrica absoluta* del Sol es 47 y su *temperatura efectiva* es 5800 K. Sirio es una estrella que se encuentra a 265 pc de la Tierra y su *temperatura efectiva* es de 10 000 K. ¿Cuál es la *magnitud aparente bolométrica* de Sirio?

Apéndice A

Repaso para la solución de ejercicios

A.1. Fracciones y quebrados

Una fracción es, en general, una parte la unidad o dicho de otra forma es una parte del número 1. Una forma de expresar una fracción es mediante el uso de quebrados. En un quebrado tenemos un cociente entre dos números enteros que en general se puede expresar como $\frac{m}{n}$. Un quebrado no siempre expresa una fracción, por ejemplo el quebrado $\frac{3}{3}$ es igual al número entero 1. Sabemos que al dividir un número entre sí mismo tenemos la unidad. El quebrado $\frac{6}{3}$ es el número entero 2.

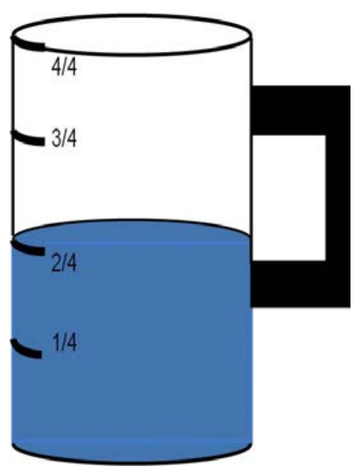

Figura A.1: Jarra de 1 litro con divisiones de $\frac{1}{4}$ de litro.

Un caso particular de una fracción expresada en quebrados se representa en la Fig. A.1 en la que se dibuja una jarra con divisiones. La capacidad total de la jarra es de 1 litro y cada división es de $\frac{1}{4}$ de litro. La jarra tiene agua hasta la segunda división. Esto quiere decir que tenemos $\frac{2}{4}$ de litro de agua en dicha jarra.

Este número lo podemos escribir de la siguiente manera

$$\frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}. \tag{A.1}$$

En la multiplicación de quebrados se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador. Entonces, el lado derecho de la igualdad anterior se puede expresar como

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2}. \tag{A.2}$$

Nuevamente, recordamos que al dividir un número entre sí mismo tenemos la unidad entonces resulta que

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \times 1. \tag{A.3}$$

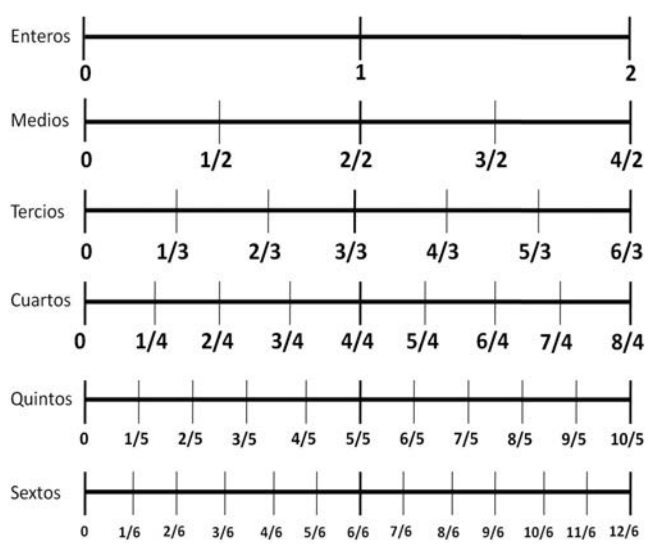

Figura A.2: Rectas numéricas con divisiones en diferentes fracciones. La recta superior tiene las divisiones en los números enteros, las rectas que siguen tienen las divisiones en valores expresados como quebrados.

Pero, todo número multiplicado por la unidad es el mismo número, entonces

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \tag{A.4}$$

En este ejemplo podemos ver que el numerador (2) lo podemos escribir como 1 y el denominador (4) como 2, es decir tenemos dos quebrados que son equivalentes. En la Fig. A.2 se muestran rectas numéricas en las que se pueden ver quebrados equivalentes. Notemos que son diferentes formas de expresar el mismo número. Por ejemplo se ve que, como vimos anteriormente, $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$. También, podemos ver que $\frac{9}{6}$ es equivalente a $\frac{6}{4}$ y a $\frac{3}{2}$, dentro de otras equivalencias. Las fracciones también se pueden representar como decimales. Para obtener el número de un quebrado en forma decimal solo tenemos que hacer la división del numerador entre el denominador de dicho quebrado. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ se expresa en decimales como 0,5.

A.1.1. Ejemplos

Escribe dos quebrados equivalentes a los siguientes:

$$\frac{2}{10}\,,\ \frac{4}{6}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{4}{7}. \tag{A.5}$$

Respuesta

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15} \tag{A.6}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} \tag{A.7}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \tag{A.8}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{16}{28} \tag{A.9}$$

A.2. Uso de exponentes

Si se tiene un número arbitrario, a, multiplicado por sí mismo n veces, se utilizan los exponentes para abreviar la notación, es decir

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n},$$

donde a se conoce como base y el superíndice n se conoce como exponente.

En general si a y b representan números naturales, m y n números enteros positivos, se tienen las siguientes reglas:

1. Cuando se multiplican dos cantidades con la misma base tenemos que el producto es igual a la base con exponente igual a la suma de sus exponentes, es decir

$$(a^m)(a^n) = a^{m+n}.$$

2. Cuando a es diferente de cero, el exponente negativo se define como

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad y \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

3. Cualquier cantidad elevada a la potencia cero es igual a 1, es decir

$$a^0 = 1.$$

4. El cociente de dos cantidades con la misma base y de exponente diferente es igual a la misma base y su exponente es la resta algebraica de los mismos, es decir

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

5. Cuando una cantidad a^m se eleva a una potencia arbitraria, n, el resultado es la misma base y su exponente es el producto de los mismos, es decir

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{mn}.$$

6. La potencia n de un producto y de un cociente es igual a sus factores elevados a la potencia n, es decir

$$(ab)^n = a^n b^n \quad y \quad \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}.$$

7. La raíz *n-ésima* de un producto y de un cociente es igual al producto y al cociente de sus raíces *n-ésimas* de cada factor, es decir

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad y \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

8. La raíz *n-ésima* de a se puede escribir en su exponente fraccionario como

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

9. Las raíz *n-ésima* de una potencia es igual a su exponente fraccionario,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

A.2.1. Ejemplos

Escribe con suma de exponentes cada una de las tres siguientes expresiones:

$$2^3 \cdot 2^2,$$

$$4^2 \cdot 4^1,$$

$$3^3 \cdot 3^3.$$

Respuesta

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$$

$$4^2 \cdot 4^1 = 4^3$$

$$3^3 \cdot 3^3 = 3^6$$

A.3. Regla de tres

Para abordar una *regla de tres simple* supongamos que tenemos los valores **k, j, v** y **a**. Si de dichos valores conocemos tres, entonces diremos que **k** es a **j** lo que **v** es a **a**, lo cual suele representarse como

$$\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{a}$$

De lo anterior tenemos que para calcular el valor de **a** basta resolver una regla de tres simple aplicando la siguiente fórmula

$$a = \frac{j \times v}{k}.$$

A.3.1. Ejemplos

Angulo descrito por la trayectoria de la Tierra

Si consideramos que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular, calcula el ángulo que describe la Tierra en 40 *semanas*. Considera que el año consta de 52 *semanas*.

Respuesta

Considerando que en 52 *semanas* la Tierra cubre un ángulo de 360°, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{52\ semanas}{40\ semanas} &= \frac{360^\circ}{x}\\
x &= \frac{14\,400^\circ}{52}\\
x &= 276.92^\circ.
\end{aligned}$$

Es decir, la Tierra cubre un ángulo 276.92° aproximadamente en 10 *meses*.

Alimentos en el espacio

El costo promedio para llevar al espacio 450 g de alimento es de \$10 000 dólares. Para reducir costos, se elimina el agua de los alimentos aquí en la Tierra quedando a 5/8 de su peso normal. ¿De cuánto es el costo ahorrado al eliminar el agua de 1 800 g de alimento?

Respuesta

Primero calculamos el costo por 1800 g sin eliminar el agua

$$\begin{aligned}
\frac{450\ g}{1\,800\ g} &= \frac{\$10\,000}{x}\\
x &= \$40\,000.
\end{aligned}$$

Si al eliminar el agua en 1 800 g, su peso se reduce a 5/8, es decir, se reduce a 1 125 g y el costo para llevar dicho peso será de \$25 000, ya que también el costo se reduce a 5/8. Por lo tanto, el dinero ahorrado es de $\$(40\,000 - 25\,000) = \$15\,000$.

Consumo de agua para los astronautas

Actualmente los astronautas necesitan 28.6 kilogramos diarios de agua. En promedio 8/143 de agua es para su consumo personal y el resto es para cubrir otras necesidades. ¿Cuántos kilogramos de agua requiere un astronauta en su consumo diario y cuánto requiere para cubrir otras actividades?

Respuesta

Para obtener la 8/143 parte de agua de 28.6 kg, basta con multiplicar ambos términos, es decir

$$\Big(\frac{8}{143}\Big)\big(28.6\ kg\big) = 1.6\ kg.$$

El restos de agua es para las activiades diarias, es decir

$$activiades\ diarias = 28.6\ kg - 1.6\ kg = 27\ kg.$$

Por lo tanto, se requieren 1.6 *kilogramos* de agua para su consumo diario y 27 *kilogramos* de agua para otras actividades.

Viaje a la Luna en Jet

Si un Jet supersónico, el cual rebasa la velocidad del sonid, viaja a una velocidad de $1\,600\ km/h$, le tomará alrededor de 240 horas llegar a la Luna, ¿a qué velocidad tendría que viajar para llegar en 2.5 días?

Respuesta

Nos enfrentamos a una razón inversamente proporcional, por lo tanto, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}(1\,600\ \frac{km}{h})(240\ h) &= (x\ \frac{km}{h})(60\ h)\\ x &= \frac{(1\,600\ \frac{km}{h})(240\ h)}{60\ h}\\ x &= 6\,400\ \frac{km}{h}\end{aligned}$$

Dicha nave tendrá que viajar a $6\,400\ \frac{km}{h}$ para completar el vuelo en 2.5 días.

A.4. Notación científica

En Astronomía se usan cantidades muy grandes y también cantidades muy pequeñas. Por esta razón es conveniente expresar dichas cantidades en notación científica. Un aspecto importante para expresar alguna cantidad en notación científica es la ubicación del punto que separe la parte entera de la parte decimal. Por ejemplo, si tenemos el número 2,5 tenemos que identificar los 2 enteros y las 5 décimas de entero. El valor de un número depende de su posición respecto al punto. Es fácil visualizar el valor de un 1 con diferentes valores decimales. A continuación expresamos algunos múltiplos de 10 en notación científica:

$$10^0 = 1,$$

$$10^1 = 10,$$

$$10^2 = 100,$$

$$10^5 = 100,000,$$

$$10^{-1} = 0{,}1,$$

$$10^{-2} = 0{,}01.$$

Para escribir en notación científica un número mayor que la unidad (1) debe determinarse el número de veces que es preciso mover el punto decimal a la izquierda para obtener la notación abreviada, por ejemplo

$$\begin{aligned} 170290 &= 1.7029 \times 10^5 \\ 931980 &= 93.198 \times 10^4 \\ 3250 &= 3.25 \times 10^3 = 32.5 \times 10^2 = 325 \times 10^1. \end{aligned}$$

Cualquier número decimal menor que 1 puede escribirse como un número entre 1 y 10 multiplicado por una potencia negativa de base 10. El exponente representa el número de veces que se mueve el punto decimal a la derecha., por ejemplo

$$\begin{aligned} 0.123 &= 1.23 \times 10^{-1} \\ 0.00987 &= 9.87 \times 10^{-3} \\ 0.000059 &= 0.59 \times 10^{-4} = 5.9 \times 10^{-5} = 59 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Para convertir la notación científica a decimal simplemente se invierte el proceso.

A.5. Area de un círculo, volumen y triángulo sobre una esfera

En algunas situaciones es necesario usar letras que pueden representar variables físicas, como por ejemplo, temperatura, longitud, volumen, área, etc. En la expresión

$$A = \pi r^2$$

A representa el área de un círculo, r su radio y π es un número cuyo valor es aproximadamente 3,1416. Si se desea conocer el radio del círculo, sólo basta despejar la variable r sin necesidad de hacer una sustitución numérica. Sin embargo, para conocer su valor será necesario hacer la sustitución numérica correspondiente para el valor de A.

Por otro lado tenemos que la circunferencia y el perímetro de un círculo están dados por las expresiones

$$C = 2\pi r \qquad y \qquad P = 2\pi r,$$

donde C es la circunferencia y P el perímetro del círculo, respectivamente.

También podemos expresar el volumen V de una esfera como

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde r es el radio de la esfera.

Para determinar las ecuaciones de *trigonometría esférica*, apoyémonos en la Figura A.3

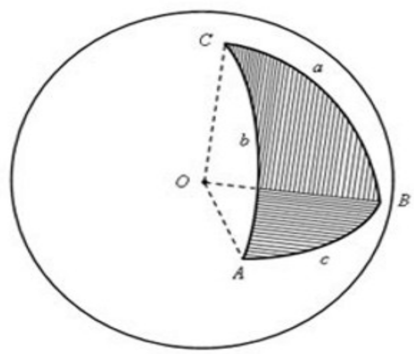

Figura A.3: Triángulo esférico.

Notemos que los puntos **A, B** y **C** en la superficie de la esfera son unidos por un arco. El arco es un segmento de circunferencia de la esfera y queda definido por dos puntos. En la Figura A.3, los arcos estan definidos como **AC, AB** y **BC**, donde cada par de arcos forma un ángulo de tal manera que

α es el ángulo formado entre los arcos AC y AB.
β es el ángulo formado entre los arcos AB y BC.
ξ es el ángulo formado entre los arcos AC y BC.

Entonces podemos escribir:

Fórmula del Coseno

$$cosCB = cosACcosAB + senACsenABcos\alpha.$$

Fórmula del Seno

$$\frac{senCB}{sen\alpha} = \frac{senAC}{sen\beta} = \frac{senAB}{sen\xi}.$$

Nota: Los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Fórmula de la Cotangente

$$cos\beta cosAB = sen\beta cot\alpha - senABcotCB.$$

A.5.1. Ejemplos

Orbita del Sol alrededor de la Vía Lactea

Nuestra estrella, el Sol, está en una galaxia que llamamos Vía Láctea. Dicha estrella está a una distancia de $27\,700 A.L.$ del centro de la galaxia y se mueve a una velocidad de 250 $\frac{km}{s}$ en una órbita circular alrededor del centro galáctico. Si la velocidad de la luz es de 300 000 $\frac{km}{s}$, calcula:

a) ¿En cuántos años el Sol completa una órbita alrededor del centro de la Vía Láctea?

b) ¿Cuántas vueltas alrededor del centro galáctico, suponiendo las mismas condiciones del enunciado anterior, ya dió el Sol si se formó hace 4 500 millones de años?

Respuestas

a) Partiendo de la definición de velocidad, se tiene que

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ T &= \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(2.62 \times 10^{17}\ km)}{250\ \frac{km}{s}} \\ T &= \frac{1.64 \times 10^{18}\ km}{250\ \frac{km}{s}} = 6.58 \times 10^{15}\ s. \end{aligned}$$

Si un año tiene 365 días, entonces $t = 208.84 \times 10^6$ años, es decir, alrededor de 208 millones de años.

b) Como el Sol se formó hace 4 500 000 000 años y el Sol tarda aproximadamente 208 millones de años en completar una órbita alrededor del centro de la galaxia, entonces se tiene que el número de revoluciones está dado por

$$\begin{aligned} x &= \frac{(4\,500\,000\,000 \text{ a nos})(1rev)}{(208\,000\,000 \text{ a nos})} \\ x &= 21.63\ rev. \end{aligned}$$

Es decir, el Sol ha dado 21.63 vueltas alrededor del centro de la galaxia desde su formación.

Radio de la Luna

¿Cuál es el perímetro de la Luna si se sabe que su radio es 2/7 del radio ecuatorial de la Tierra que mide 6 378 *km*?

Respuesta

Para determinar el perímetro, es necesario conocer el radio de la Luna, por lo tanto, partimos de

$$R_L = \frac{2}{7} R_{\oplus}. \tag{A.10}$$

El perímetro de la Luna se determina a partir de su definición

$$P_L = 2\pi R_L. \tag{A.11}$$

Sustituyendo (1.14) en la ecuación del perímetro, es decir en (1.15), se tiene que

$$\begin{aligned} P_L &= 2\pi R_L \\ P_L &= 2\pi\left(\frac{2}{7}R_{\oplus}\right) \\ P_L &= \frac{4\pi R_{\oplus}}{7} \\ P_L &= 11\,449.758\ km. \end{aligned}$$

Es decir, el perímetro de la Luna es del orden de 11 449 kilometros.

A.6. Solución a la ecuación cuadrática

Una ecuación de segundo grado es una ecuación cuyo exponente máximo es igual a dos, la cual se expresa como

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{A.12}$$

Si $a = 0$, la ecuación (A.12) se convierte en una ecuación de primer grado

$$bx + c = 0,$$

cuya solución es

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Sin embargo, si a es diferente de cero, la ecuación (A.12) tiene dos soluciones dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El hecho de hallar las soluciones significa que hemos hallado los valores para la ecuación que la convierten en una identidad. A continuación se muestran ejemplos que muestran la solución de ecuaciones de primer grado, que, en caso de haber dudas, le dejamos al lector de tarea dar un repaso extra.

A.6.1. Ejemplos

Agua en el espacio

Un trasbordador espacial necesita llevar agua al espacio. Si el agua, al congelarse, aumenta su volumen en un 10 %. ¿cuántos *metros cúbicos* de agua se necesitan para formar 50 *metros cúbicos* de hielo?

Respuesta

Sea a la variable agua, como el agua al congelarse aumenta su volumen en un 10 %, es decir $a/10$, entonces es necesario determinar el agua necesaria que al ser aumentada en un 10 % sea igual a 50 *metros cúbicos*. Por lo tanto, podemos establecer la siguiente ecuación y resolver para el agua:

$$\begin{aligned} a + \frac{a}{10} &= 50\ m^3 \\ \frac{10}{10}a + \frac{a}{10} &= 50\ m^3 \\ \frac{11}{10}a &= 50\ m^3 \\ a &= \frac{500\ m^3}{11} \\ a &= 45.45\ m^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se necesitan 45.45 m^3 de agua, que al aumentar su volumen en un 10 %, al congelarse, se tienen los 50 m^3 de hielo.

Combustible de una nave espacial

El depósito de combustible de una nave espacial tiene dos llaves de abastecimiento. Una lo llena en dos horas y la otra en tres horas. ¿En qué tiempo lo llenarán juntas?

Respuesta

Vamos a establecer dos métodos para llegar al mismo resultado.

Método 1

Se debe buscar un factor común para ambos, en este caso el tiempo. Si una llave llena el depósito en 2 horas y la otra en 3 horas, entonces

$$\begin{aligned} Primera\ llave\ llena\ 3\ \text{depósitos} &= 6\ horas \\ Segunda\ llave\ llena\ 2\ \text{depósitos} &= 6\ horas \end{aligned}$$

Con base a lo anterior, podemos decir que las dos llaves llenan 5 depósitos en 6 *horas*. Entonces podemos establecer una regla de tres para determinar el tiempo que le toma en llenar un depósito, es decir

$$\frac{6\ horas}{x\ horas} = \frac{5\ \text{depósitos}}{1\ \text{depósito}}.$$

Resolviendo para el tiempo, en horas, se tiene que

$$\begin{aligned} x &= \frac{(6\ horas)(1\ \text{depósitos})}{5\ \text{depósitos}} \\ x &= 1.2\ horas. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se necesita ≈ 72 *minutos* para llenar un depósito con ambas llaves.

Método 2

Se establece la razón de cada una de ellas para llenar un depósito, es decir

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1,$$

donde x es el tiempo. Resolviendo para x se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{2x + 3x}{6} &= 1\ hora \\ \frac{5x}{6} &= 1\ hora \\ x &= \frac{(1\ hora)(6)}{5} \\ x &= 1.2\ horas. \end{aligned}$$

Es decir, aproximadamente 72 *minutos*.

A.7. Operaciones con ángulos

Los ángulos se acostumbran expresar como tres números que se separan ya sea por dos puntos ó bien por espacios. A continuación veremos algunas de las operaciones de utilidad con ángulos.

A.7.1. Angulos en grados y fracciones de grado

Un ángulo θ se puede expresar en grados, minutos de arco y segundos de arco de la siguiente manera $\theta \ = \ x : \ y : \ z$ dicho ángulo también lo podemos expresar en grados y fracciones de grado a partir de

$$\theta \ = \ x \ + \ \frac{y}{60} \ + \ \frac{z}{3600} \tag{A.13}$$

donde x son los grados y son los minutos del arco y z son los segundos del arco, ya que 1 *minuto del arco* ($1'$) es $\frac{1}{60}$ de *grado* y un *segundo de arco* ($1''$) es $\frac{1}{3600}$ de *grado*. La Ecuación A.13 también se usa para pasar *horas*, *minutos*, *segundos* a *horas* y fracciones de *hora*. Cuando algún cálculo no requiere mucha precisión solo se usan los grados ó bien los grados y los minutos. También cuando la distancia entre dos lugares es grande y solo se requiere tener una idea de la diferencia de coordenadas es suficiente expresar las coordenadas y las diferencias en las coordenadas con grados y con uno ó dos decimales ó incluso solo con los grados. Cuando se requiera más precisión, por ejemplo para diferencias de coordenadas entre lugares cercanos, es conveniente usar 4 decimales. Para la ascención recta, debido a que está dada en *horas* es mejor usar cinco decimales.

A.7.2. Transformación de grados y fracciones de grado a grados, minutos y segundos

Si tenemos un tiempo en *grados* y fracciones de *grado* y lo queremos transformar a *grados*, *minutos* y *segundos* hacemos lo siguiente:

a) Primero tomamos sólo la parte fraccionaria y la multiplicamos por 60 así tenemos *grados* y *minutos* de *arco*. Por ejemplo tenemos el siguiente ángulo en *grados* y fracciones de *grado*

$$\theta \ = \ 6{,}23^\circ \tag{A.14}$$

para pasarlo a grados y minutos, multiplicamos la parte fraccionaria por 60

$$0{,}23 \ \times \ 60 \ = \ 12{,}8' \tag{A.15}$$

entonces el ángulo lo podemos expresar en grados y minutos como

$$\theta \ = \ 6^\circ \ 12{,}8'. \tag{A.16}$$

b) Si queremos transformar las fracciones de *minuto* a *segundos* entonces tomamos la parte fraccionaria de los *minutos* y la multiplicamos por 60, es decir

$$0{,}8 \ \times \ 60 \ = \ 48''. \tag{A.17}$$

Entonces el ángulo inicial que incluía fracciones expresado en *grados*, *minutos* y *segundos* es

$$6{,}23^\circ \ = \ 6^\circ \ 12' \ 48''. \tag{A.18}$$

A.7.3. Suma de ángulos

Supongamos que tenemos dos ángulos que están expresados en grados, minutos y segundos, por ejemplo:

$$\phi_1 \; = \; x_1^\circ \, y_1' \, z_1'' \tag{A.19}$$

$$\phi_2 \; = \; x_2^\circ \, y_2' \, z_2'' \tag{A.20}$$

y que necesitamos sumarlos. Entonces, hacemos lo siguiente:

1) Sumamos los *segundos de arco* de un ángulo a los del otro ángulo.

$$z_1'' + z_2''. \tag{A.21}$$

2) a) Si el resultado de la suma anterior es menor a 60 entonces ese valor va a ser la cantidad de la suma de segundos.
b) Si el resultado es mayor a 60 entonces lo dividimos entre 60. Separamos en dos cifras la parte entera E' y la parte decimal D'. La parte decimal la multiplicamos por 60 ($D' \;\times\; 60$) y ese valor lo escribimos como z_3. Este valor (z_3) corresponde a los segundos de la suma.

3) A la parte entera ($E\ ^1$) la sumamos junto con los *minutos* de los dos ángulos, es decir

$$y_1' + y_2' + E'. \tag{A.22}$$

4) a) Si el resultado de la suma es menor a 60 entonces ese valor va a ser la cantidad de *minutos* del resultado de la suma.
b) Si el resultado es mayor a 60 entonces lo dividimos entre 60 y separamos la parte entera E° y la parte decimal D°. La parte decimal la multiplicamos por 60 y ese valor va a ser el valor de los *minutos* de la suma ($D^\circ \;\times\; 60$).

5) A la parte entera la sumamos junto con los *grados* de los dos ángulos, es decir

$$x_1^\circ + x_2^\circ + E^\circ. \tag{A.23}$$

Esta va a ser la parte de *grados* enteros de la suma de los dos ángulos.

A.7.4. Relación entre ángulos (*grados*) y tiempo (*hora*)

La *longitud geográfica* se mide en *grados*. Por otro lado, una vuelta de la Tierra sobre su eje corresponde a 360°. Si consideramos que la Tierra da una vuelta en 24 horas, entonces en una hora gira un ángulo dado por

$$\frac{360^\circ}{24 \;\; horas} = 15 \frac{\circ}{hora} \tag{A.24}$$

ó bien

$$1\ hora\ =\ 15^\circ. \tag{A.25}$$

En realidad hay varias escalas de tiempo (solares y sideral) y la Ecuación A.24 es sólo una aproximación de la relación entre tiempo y ángulo debido a la rotación de la Tierra sobre su eje.

A.7.5. Longitudes geográficas referidas al Este

Para algunos lugares la *longitud geográfica* se acostumbra referirla al Este. Por ejemplo, las coordenadas geográficas de Moscú son:

$$\phi = 55^\circ\ 45'\ 08''N. \tag{A.26}$$

$$l = 37^\circ\ 36'\ 56''E. \tag{A.27}$$

Notarás que la *longitud* está dada hacia el Este y no hacia el Oeste. En lugar de escribir la *longitud* referida hacia el Este en ocasiones es conveniente escribirla referida hacia el Oeste, por ejemplo, si necesitamos restar dos longitudes.
Para calcular la *longitud* referida al Oeste restamos la *longitud* referida al Este a 360°, es decir

$$l\ (Oeste)\ =\ 360^\circ\ -\ l\ (Este). \tag{A.28}$$

Entonces en el caso de la *longitud geográfica* de Moscú tenemos que

$$l\ =\ 360^\circ\ -\ (37^\circ\ 36'\ 56'') \tag{A.29}$$

lo cual pasando *minutos* y *segundos* a fracciones de *grado* es

$$l\ =\ 360^\circ\ -\ 37{,}6156^\circ \tag{A.30}$$

$$l\ =\ 322{,}384\ W. \tag{A.31}$$

A.7.6. Ejemplos

Pasar de grados, minutos y segundos a grados y fracciones de grados

Calcula la *latitud* (ϕ) y la *longitud* (l) de la ciudad de Puebla en grados y fracciones de grados si las coordenadas son

$$\phi\ =\ 19^\circ\ 02'\ 30'' \tag{A.32}$$

$$l\ =\ 98^\circ\ 11'\ 48'' \tag{A.33}$$

Respuesta

Usando la Ecuación A.13 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\phi &= 19 + \frac{2}{60} + \frac{30}{3600} \\
\phi &= 19 + 0{,}0333 + 0{,}0083 \\
\phi &= 19{,}0416^\circ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l &= 98 + \frac{11}{60} + \frac{48}{3600} \\
l &= 98 + 0{,}1833 + 0{,}0133 \\
l &= 98{,}1966^\circ .
\end{aligned}
$$

A.8. Funciones trigonométricas

El triángulo rectángulo ABC tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90° y lados de longitud a, b, y c. Las funciones trigonométricas para el ángulo α son

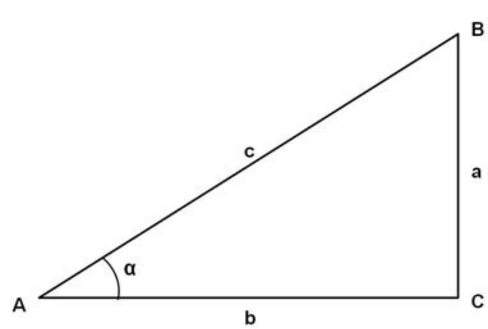

Figura A.4: Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

$$
\begin{aligned}
\textit{Seno de } \alpha = \quad & \operatorname{sen} \alpha & = \frac{a}{c} = \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Hipotenusa}} \\
\textit{Coseno de } \alpha = \quad & \cos \alpha & = \frac{b}{c} = \frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Hipotenusa}} \\
\textit{Tangente de } \alpha = \quad & \tan \alpha & = \frac{a}{b} = \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}} \\
\textit{Cotangente de } \alpha = \quad & \cot \alpha & = \frac{b}{a} = \frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Cateto opuesto}} \\
\textit{Secante de } \alpha = \quad & \sec \alpha & = \frac{c}{b} = \frac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Cateto adyacente}} \\
\textit{Cosecante de } \alpha = \quad & \csc \alpha & = \frac{c}{b} = \frac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Cateto opuesto}}
\end{aligned}
$$

A.9. Suma de ángulos

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}, \\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}.
\end{aligned}
$$

A.10. Identidades pitagóricas

$$
\begin{aligned}
\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\
\tan^2 \alpha + 1 &= \sec^2 \alpha, \\
\cot^2 + 1 &= \csc^2 \alpha.
\end{aligned}
$$

A.11. Función logaritmo

$$
\begin{aligned}
\log_a MN &= \log_a M + \log_a N \\
\log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N \\
\log_a M^p &= p \log_a M.
\end{aligned}
$$

A.11.1. Ejemplos

Escribe las siguientes expresiones como suma ó resta de logaritmos, según sea el caso:

$$log\left(\frac{x}{y}\right)\ ,\ log\left(a\ \frac{x}{y}\right)\ ,\ log\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

Respuesta

$$log\left(\frac{x}{y}\right)\ =\ log\ (x)\ -\ log\ (y).$$

$$log\left(a\ \frac{x}{y}\right)\ =\ log\ (ax)\ -\ log\ (y)\ =\ log\ (a)\ +\ log\ (x)\ -\ log(y).$$

$$log\left(\frac{x^2}{y}\right)\ =\ log\ (x^2)\ -\ log\ (y) =\ 2\ log\ (x)\ -\ log\ (y).$$

A.12. Angulo subtendido

Para revisar el concepto de *ángulo subtendido* vamos a ver la Figura **??**.

Si desde una distancia, d, observamos a una persona, cuya estatura es h y está de pie, ésta subtenderá en dirección vertical, un ángulo α tal que

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h/2}{d}.$$

Podemos decir que el ángulo subtendido es el ángulo que se forma entre las líneas de visión de un observador hacia los extremos de una persona ó un objeto. En el caso de objetos astronómicos, generalmente $\alpha \ll 1$ con lo cual $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \left(\frac{\alpha}{2}\right)$, entonces,

$$\alpha = \frac{h}{d}.$$

Vamos a suponer que tenemos dos situaciones

a) En la primera de ellas una persona está cerca del observador y subtiende un ángulo α.
b) En la segunda situación la misma persona está lejos del observador y subtiende un ángulo α_2.

Como se puede ver de la Figura **??** $\alpha_2\ <\ \alpha$.

Si tienes un objeto muy grande y éste se encuentra muy alejado, dicho objeto subtenderá un ángulo pequeño, mientras que un objeto pequeño y muy cerca subtenderá un ángulo grande, así es como podemos tapar el Sol con una moneda.

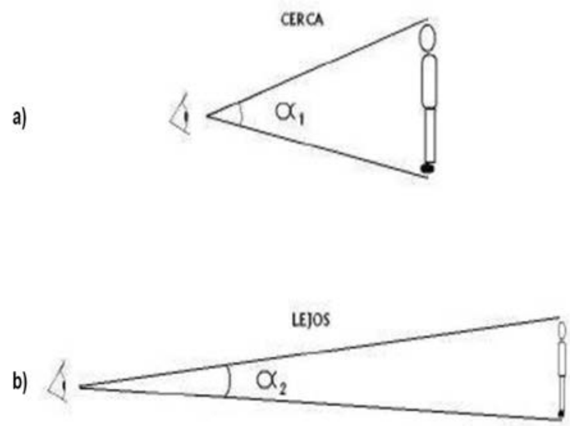

Figura A.5: **a)** Angulo subtendido por una persona estando cerca del observador. **b)** Angulo subtendido por la persona pero ahora cuando está lejos del observador. Se puede ver que el ángulo subtendido es mayor cuando la persona está más cerca. A medida que se vaya alejando del observador el ángulo que subtiende será menor.

A.12.1. Ejemplos

Diámetro del Sol a partir del diámetro ángular de la Luna

En un eclipse total de Sol, la Luna y el Sol subtienden ángulos muy similares. Si la Luna, vista desde la Tierra, subtiende un ángulo de $0.5°$ y la distancia media entre la Tierra y el Sol es de 1.5×10^8 km. Determina el diámetro del Sol en *kilḿetros*.

Respuesta

En un eclipse de Sol, la Luna y la Tierra subtienden el mismo ángulo, entonces se debe cumplir que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_L}{r_L} \qquad y \qquad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_\odot}{r_\odot},$$

donde α es el ángulo que subtiende la Luna vista desde la Tierra, R_L y $R_\odot$ son el radio de la Luna y el Sol, r_L y $r_\odot$ son la distancia de la Tierra a la Luna y el Sol, respectivamente. Como $\alpha/2 \ll 1$, entonces $\tan(\alpha/2) \approx \alpha/2$. Por lo tanto, se tiene que el radio del Sol está dado por

$$\begin{aligned}
R_\odot &= r_\odot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
R_\odot &= (1.5 \times 10^8\ km)(4.363 \times 10^{-3}\ rad) \\
R_\odot &= 654\,498.46\ km.
\end{aligned}$$

Como el diámetro del Sol es dos veces su radio, entonces

$$\begin{aligned} D_{\odot} &= 2R_{\odot} \\ D_{\odot} &= 1\,308\,996.93\ km. \end{aligned}$$

A.13. Unidades de Física

A.13.1. Masa

$$1\ kg\ = 1000\ gr\ =\ 10^3\ gr.$$

A.13.2. Longitud

$$1\ km = \ 1000 m = \ 10^5\ cm.$$

$$1\ m\ =\ 1000\ mm\ =\ 10^3\ mm.$$

$$1\ A.L.\ =\ 9{,}460 \times\ 10^{12}\ km.$$

Nota: 1 A.L. = 1 año luz.

A.13.3. Velocidad

$$1\ \frac{km}{h}\ =\ \frac{m}{3{,}6\ s}.$$

$$1\ \frac{m}{s}\ =\ 3{,}6\ \frac{km}{h}.$$

A.13.4. Fuerza

$$1\ Newton\ (N) = \ 10^5 dinas = \ 1\frac{kg \cdot m}{s^2}.$$

A.13.5. Ejemplos

Distancia de Sirio a partir de la velocidad de la luz

Sabiendo que Sirio, la estrella más brillante del cielo nocturno vista desde la Tierra, se encuentra a una distancia de $8.23 \times 10^{16}\ m$, calcula el tiempo que tarda la luz de Sirio en llegar a la Tierra.

Respuesta

Sabemos que la velocidad de la luz en el vacío es de $3 \times 10^{8}\ \frac{m}{s}$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ t &= \frac{d}{c} = \frac{8.23 \times 10^{16}\ m}{3 \times 10^{8}\ \frac{m}{s}} = 2.743 \times 10^{8}\ s. \end{aligned}$$

Si un año tiene 365 días, es decir $31\,566\,000\ s$, entonces la luz de Sirio tarda aproximadamente $8.73\ A.L.$ en llegar a la Tierra.

Tiempo que tarda la luz en llegar de una estrella a la Tierra

Si la estrella más cercana está a 4.3 años luz de distancia, expresa en años el tiempo que le llevaría a una nave viajar a la velocidad de $10\ \frac{km}{s}$ a dicha estrella. Toma el valor de la velocidad de la luz como $c = 300\,000\,000\ \frac{m}{s}$.

Respuesta

Primero calculamos la distancia que recorre la luz en metros:

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{4.3\ al}{1}\right)\left(\frac{365\ \text{días}}{1\ al}\right)\left(\frac{24\ hrs}{1\ \text{días}}\right)\left(\frac{3600\ s}{1\ hrs}\right)\left(\frac{300\,000\,000\ \frac{m}{s}}{1\ s}\right) \\ d &= 4.06 \times 10^{16}\ m. \end{aligned}$$

Ahora que tenemos la distancia a la que se encuetra dicha estrella y conociendo la velocidad de la nave, determinanos el tiempo que le llevaría en llegar a la estrella:

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{v} \\ t &= \frac{4.06 \times 10^{16}\ m}{10\,000\ \frac{m}{s}} \\ t &= 4.06 \times 10^{12}\ s = 129\,000\ \text{años}. \end{aligned}$$

A.14. Ejercicios propuestos para repasar conceptos de utilidad

A.14.1. Fracciones y quebrados

a) Expresa $\frac{9}{6}$ como una multiplicación de dos quebrados.
b) Demuestra que $\frac{9}{6}$ es igual a $\frac{3}{2}$.
c) Demuestra que $\frac{9}{6}$ es igual a $\frac{6}{4}$.

A.14.2. Función logaritmo

Escribe los siguientes logaritmos como suma o resta de logaritmos.

$$\log(xy), log\left(\frac{x}{ay}\right), log\left(\frac{x}{y^2}\right),$$
$$\log\left(\frac{x^2}{y^2}\right), log\left(\frac{ax^2}{y}\right),$$
$$\log(ax^2y^2).$$

A.14.3. Despejar una variable

Despeja y en las siguientes ecuaciones:

$$y + x = 1.$$

$$9y + 3 = 67x - 89.$$

$$y + 2 = x.$$

$$2 + y(12 - 131) = 3x - 112.$$

$$2x + y^2 = 0.$$

$$2y^5 = x - 12.$$

$$\frac{y}{3}x = 0.$$

A.14.4. Sol fijo en el firmamento

¿Con qué velocidad deberá volar un avión en el *Ecuador* de *Este a Oeste*, para que a sus pasajeros les parezca que el Sol está fijo en el firmamento?

A.14.5. Perímetro y volumen de la Luna

Supón que la Tierra es una esfera, que conoces su perímetro y sabes que el radio de la Luna es de 2/7 el de la Tierra. Escribe la ecuación del volumen de la Luna en funciń del perímetro de la Tierra.

A.14.6. Angulo que subtiende Júpiter visto desde Io

Calcula el ángulo que subtiende Júpiter visto desde su satélite Io si el radio de Júpiter es de 71492 km y la distancia que los separa es de 422×10^3 km.

A.14.7. Monte Olimpo

El monte Olimpo, con una altura de 25 km, es el volcán más alto del planeta Marte. El diámetro de Marte es de 6 800 km. Por otro lado, la montaña más alta de la Tierra es el monte Everest con una altura aproximada de 8 800 m y la Tierra tiene un diámetro de 12 756 km. Si en la Tierra hubiera un volcán que fuera tan alto como el monte Olimpo lo es en comparación con el diámetro de Marte, ¿qué altura debería de tener ese volcán?

Apéndice B

Constantes

NOMBRE	*VALOR*
Radio polar de la Tierra	$R_{\oplus} = 6357\ km$
Radio ecuatorial de la Tierra	$R_{\oplus} = 6378\ km$
Radio medio de la Luna	$R_L = 1738\ km$
Distancia media entre la Luna y la Tierra	$D_{media} = 384\,401\ km$
Masa de la Tierra	$M_{\oplus} = 5{,}976 \times 10^{24}\ kg$
Radio del Sol	$R_{\odot} = 6{,}9599 \times 10^{10}\ cm$
Masa del Sol	$M_{\odot} = 1{,}989 \times 10^{33}\ g$
Luminosidad del Sol	$L_{\odot} = 3{,}826 \times 10^{33}\ \frac{erg}{s}$
Unidad Astronomica	$1\ U.A. = 1{,}5 \times 10^{8}\ km$
Parsec	$pc = 3{,}085678 \times 10^{18}\ cm$
A.L.	$1\ A.L. = 9{,}46053 \times 10^{17}\ cm$
Constante de Gravitacion Universal	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$
Velocidad de la Luz	$c = 2{,}99 \times 10^{6}\ \frac{km}{s}$
Angstrom	$\mathring{A} = 10^{-10}\ m$

*La Unidad Astronómica (U.A.) es la distancia media entre la Tierra y el Sol.

*El Año Luz también se abrevia como *A.L.*

B.1. Glosario

Absorción. En física, es la captación de luz, calor u otro tipo de energía radiante por parte de las moléculas. La radiación absorbida se convierte en calor; la radiación que no se absorbe es reflejada, y sus características cambian. Un ejemplo muy común, sucede cuando la luz solar incide sobre un objeto, suele ocurrir que algunas de sus longitudes de onda son absorbidas y otras reflejadas.

Acimut. El acimut de una estrella es el ángulo entre el Norte y el punto en el que se intersecta el horizonte con la vertical de dicha estrella. En Astronomía, el acimut se mide hacia el Este y puede tener valores desde 0° hasta 360°.

Afelio. En la órbita elíptica de un cuerpo alrededor del Sol se identifican particularmente dos puntos, el más cercano al Sol y el más lejano. El afelio es la posición en la que el objeto está en el punto más alejado.

Año Luz (AL). Un año luz es una unidad de longitud y representa la distancia que recorre la luz en un año, la cual equivale a 9.46×10^{12} km.

Ascensión recta (AR). Es el arco del Ecuador Celeste medido hacia el Este desde el punto vernal (también llamado punto Aries) hasta el meridiano del objeto celeste. La AR se mide en horas y puede tomar valores de 0 a 24.

Asteroide. Un asteroide o bien los asteroides son objetos rocosos y metálicos que orbitan al Sol. Sin embargo, son demasiado pequeños para ser considerados planetas; algunos llegan a medir unos cientos de kilómetros. Se encuentra una gran cantidad de asteroides entre las órbitas de Marte y Júpiter en una región conocida precisamente como el Cinturón de Asteroides.

Atmósfera. Mezcla de varios gases que rodea un objeto celeste cuando éste cuenta con un campo gravitatorio suficiente para impedir que escapen.

CCD. Acrónimo de Charge-Coupled Device. Un CCD es un arreglo matricial de capacitores muy sensibles a la luz. Si incide luz sobre un capacitor, éste produce una pequeña corriente eléctrica que posteriormente se registra como un valor numérico. Así, el arreglo permite producir una matriz de valores de la intensidad de la luz registrada por los capacitores. Es decir, al igual que un negativo fotográfico, permite registrar imágenes (pero un CCD las guarda como arreglos numéricos). Los CCDs se usan en telescopios para registrar la imágenes de objetos celestes y también en las cámaras digitales.

Cenit. Es el punto de la esfera celeste que esta sobre un observador.

Círculo horario. El círculo horario de una estrella es el círculo mayor que pasa por dicha estrella y por los polos de la esfera celeste.

Círculo mayor. Es el círculo imaginario que resulta de la intersección de un plano imaginario con una esfera y que la divide en dos partes iguales (semiesferas).

Círculo menor. Es el círculo imaginario que se produce como resultado de la intersección de un plano imaginario con una esfera y que la divide en partes diferentes. Esto significa que el plano que la divide no pasa por el centro de la esfera.

Cometas. Son cuerpos pequeños, de algunos kilómetros de diámetro, compuestos de roca y hielo, que giran alrededor del Sol. Se cree que existe un gran número de estos más allá de la órbita de Plutón, en la Nube de Oort y en el cinturón de Kuiper. Los cometas salen de estas zonas por efecto de una perturbación gravitacional (posiblemente generada por una estrella), internándose en nuestro Sistema Solar. Cuando un cometa está lejos del Sol, su núcleo es un gran bloque de hielo sucio. El cometa se calienta cuando se acerca al Sol y parte del hielo se evapora dejando gas y polvo a su alrededor. Así, cada vez que los cometas visitan al Sol, van perdiendo material. De ese material se forman dos colas; una de gas y otra de polvo. El viento solar y la presión radiativa de la luz del Sol son los factores que más influyen en la aparición de dichas colas. El gas es empujado por el viento solar, generando una cola. El polvo, además de ser empujado por el viento solar también es empujado por la presión radiativa de la luz del Sol y entonces se produce la segunda cola.

Culminación. Cuando, para un observador, una estrella está en su posición más alta, se dice que dicha estrella está en su culminación superior. Son muy pocas las estrellas que pueden estar en su cenit. Una estrella en su culminación superior está en el meridiano celeste del cenit del observador y precisamente en este momento la estrella está en su posición más próxima al cenit de dicho observador. En la culminación inferior, la estrella se encuentra lo más cerca posible al **nadir**.

Declinación. La declinación (δ) de una estrella es la distancia angular, medida a lo largo del círculo horario de dicha estrella, desde la estrella al ecuador celeste. La declinación toma valores negativos (de -90° a 0°) para estrellas que están al Sur del ecuador celeste y valores positivos (de 0° a 90°) para estrellas que están al Norte del ecuador celeste. Por lo anterior, es claro que la declinación de un punto que está sobre el ecuador es cero, la del punto que está sobre el polo Norte es 90° y la del que está sobre el polo Sur es $-90°$. Las líneas imaginarias de declinación, sobre la esfera celeste, son el equivalente a las líneas imaginarias de **latitud** geográfica, sobre la Tierra.

Día Sideral. Se dice del tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos de una misma estrella por el **meridiano** del lugar. Para calcular el tiempo sideral no se emplea el paso de cualquier estrella sino el paso del **punto vernal**.

Día Solar. Se dice del intervalo de tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el meridiano del lugar.

Dispersión. Fenómeno de separación de las ondas de distinta frecuencia al atravesar un material, cualquier separación de ondas de distintas frecuencias puede llamarse dispersión.

Eclipse. Es el fenómeno que ocurre cuando un objeto celeste pasa por la sombra que genera otro. Nuestro planeta, la Tierra, interviene en dos eclipses llamados eclipse de Sol y eclipse de Luna. El eclipse de Sol ocurre cuando la sombra de la Luna cae sobre algunas zonas de la Tierra. El eclipse de Luna ocurre cuando la Luna entra en la zona de sombra de la Tierra.

Eclíptica. Es la trayectoria que sigue el Sol, a lo largo del año, en la esfera celeste.

Ecuador. Es la intersección del **plano ecuatorial** con la superficie de la Tierra.

Efecto Doppler. El efecto Doppler es el incremento o disminución de la longitud de onda, de una onda emitida por un objeto en movimiento, en relación a la longitud de onda que recibe un observador.

Eje polar. La Tierra gira como un cuerpo sólido alrededor de un eje imaginario que pasa por los polos y por el centro de la Tierra. El eje de rotación de la Tierra está inclinado 23.5° respecto al **plano de la eclíptica**. En una primera aproximación, el eje de rotación de la Tierra apunta a un punto fijo de la esfera celeste, que actualmente está muy cercano ($\sim 1^\circ$) a una estrella llamada "Estrella Polar".

Electrón. Partícula elemental de carga negativa que forma parte de la familia de los leptones y que, junto con los protones y los neutrones, forma los átomos y las moléculas. Los electrones están presentes en todos los átomos y cuando son arrancados del átomo se llaman electrones libres.

Energía cinética. Energía que un objeto posee en su movimiento. La energía cinética depende de la masa y la velocidad del objeto según la ecuación:

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

donde m es la masa del objeto y v la velocidad del mismo.

Energía potencial. Energía almacenada que posee un sistema como resultado de las posiciones relativas de sus componentes. Si se mantiene un objeto a una cierta distancia, por ejemplo del suelo, el sistema formado por el objeto y la Tierra tiene una determinada energía potencial, U, la cual se define como

$$U = Wh = mgh,$$

donde W y m son el peso y la masa, respectivamente, de un objeto localizado a una distancia h sobre algún punto de referencia.

Energía térmica. Energía que se transfiere de un cuerpo a otro debido a su diferencia de temperaturas. También recibe el nombre de calor.

Escala de altura. La densidad de la atmósfera, ρ, para diferentes gases depende de la altura, h, a la cual se mide. Suponiendo que los efectos de temperatura son constantes, dicha dependencia está dada por

$$\rho = \rho_0 e^{-(\frac{h}{H})},$$

donde ρ_0 es la densidad media al nivel del mar, h es la altura a la cual se mide la densidad y H es la escala de altura (la cual toma diferentes valores para cada gas). El valor de H define la altura a la que la presión ha decrecido en un factor de e (2.71).

Escala de placa. La escala de placa es un parámetro muy empleado en Astronomía observacional. Se llama escala de placa porque, antes del empleo de CCDs y cámaras digitales, la imagen captada por los telescopios se registraba en placas fotográficas.

Esfera Celeste. Es una esfera imaginaria en la que están los objetos celestes con la Tierra en el centro. El Polo Norte y el Polo Sur celestes corresponden a la intersección del Eje Polar con la Esfera Celeste. Sobre la Esfera Celeste también se define un ecuador que es el círculo mayor que resulta de la intersección del plano ecuatorial terrestre con la Esfera Celeste.

Estrella. Es una bola de gas que brilla con luz propia y cuya energía es generada por las reacciones nucleares que ocurren en su interior. La masa mínima de una estrella es de 0.08 veces la masa del Sol ($M_\odot$), mientras que las más masivas son del orden de 100 $M_\odot$. El Sol es la estrella más cercana a nosotros.

Estrella Binaria. Es un sistema compuesto por dos estrellas que están unidas por su atracción gravitacional y giran en torno a un mismo punto que es el centro de masas. La gran mayoría de las estrellas no están solas sino formando sistemas binarios, o estrellas binarias.

Estrella de Neutrones. Cuando una estrella muy masiva explota como supernova, su parte central puede colapsarse hasta alcanzar densidades comparables a las de un núcleo atómico, formando lo que se conoce como una estrella de neutrones. Estas estrellas tienen una masa del orden de 1.4 veces la de Sol comprimida en un radio del orden de 10 km.

Flujo, densidad de flujo. Generalmente se utiliza la palabra flujo para referirse a la densidad de flujo. El flujo que registra un observador, en una longitud de onda dada, es la potencia (o energía por unidad de tiempo) recibida por unidad de área. Estrictamente hablando, deberíamos decir potencia radiativa, porque es la potencia de la luz radiada por un objeto que capta el observador por unidad de área. Las unidades del flujo son $[F] = erg/s\ cm^2$ (ver **luminosidad**).

Flujo total. Es el flujo integrado sobre todas las longitudes de onda.

Fotón. Cantidad mínima de energía de la luz u otra radiación electromagnética. Esta se comporta como una onda y a veces se comporta como si estuviera compuesta por un haz de pequeñas partículas o cuantos de energía. La energía E de un fotón se expresa mediante la ecuación:

$$E = h\nu,$$

donde h es la constante de Plank y ν es la frecuencia (numero de oscilaciones por segundo) de la luz.

Galaxia. Es un inmenso conjunto de estrellas, gas y polvo que están ligados gravitacionalmente. De acuerdo a su apariencia, las galaxias se clasifican en elípticas, espirales e irregulares. La galaxia que nosostros habitamos es una galaxia espiral conocida como Vía Láctea.

Horizonte y plano horizontal. El plano horizontal de un observador es un plano imaginario perpendicular a la línea que une a dicho observador con su **cenit**. El horizonte es la intersección de este plano con la Esfera Celeste. Como en muchos lugares hay montañas el horizonte que ve un observador no necesariamente coincide con la definición astronómica de horizonte.

Latitud Geográfica Se llama latitud geográfica a la distancia angular desde el ecuador a un lugar sobre la Tierra, medida a lo largo del meridiano (de dicho lugar). La latitud toma valores negativos (de -90° a 0°) para lugares que están al Sur del Ecuador y valores positivos (de 0° a 90°) para lugares que están al Norte del Ecuador.

Ley de los cosenos. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera, y γ denota la medida del ángulo comprendido entre los lados de longitud a y b, se tiene que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

que es la expresión matemática de la ley de los cosenos.

Leyes de Kepler. Son tres leyes formuladas por Johannes Kepler a principios del siglo XVII sobre el movimiento de los planetas. Estas están basadas en los datos obtenidos por Tycho Brahe. Las leyes dicen lo siguiente:

- La Primera Ley dice: Los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos de cada elipse.
- La Segunda Ley dice: El radio vector que une al Sol con un planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales. Matemáticamente podemos expresar la Segunda Ley como:

$$\frac{1}{2}(\omega_1 r_1^2) = \frac{1}{2}(\omega_2 r_2^2) = cte,$$

donde ω es la velocidad angular del planeta y r la magnitud del radio vector.

- La Tercera Ley dice: El período de revolución depende de la distancia al Sol, estrictamente hablando depende del semieje mayor (a), de la siguiente forma:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_\odot + m)}{4\pi^2},$$

donde G es la Constante de Gravitación Universal, $M_\odot$ es la masa del Sol y m la masa del planeta, cuya órbita tiene un semieje mayor a. Si la masa m es muy pequeña en relación a la masa $M_\odot$ entonces la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_\odot)}{4\pi^2} = cte.$$

El lado derecho puede expresarse sólo en términos de la masa del Sol y de otros valores que no dependen de las características de los cuerpos que giren alrededor de él. Es decir, el resultado del cociente $\frac{a^3}{T^2}$ es el mismo para cualquier objeto de masa $m << M_\odot$ que orbite al Sol y, por lo tanto, es un valor constante. Podemos expresar el cociente del lado izquierdo de la ecuación anterior en años y en Unidades Astronómicas (UA). Para la Tierra tenemos que a=1 UA y T=1 año, entonces, como vimos en la ecuación anterior que ese valor es constante, así para cualquier cuerpo que orbite al Sol se cumple que

$$a^3 = T^2.$$

Esta expresión es muy sencilla y nos permite calcular directamente la distancia entre el Sol y cualquier objeto que lo orbite, si conocemos su período de traslación.

Leyes de Newton. La mecánica se basa en tres leyes naturales, enunciadas por primera vez, de un modo preciso, por Sir Isaac Newton (1643-1727) y publicadas en 1686. Estas leyes dicen lo siguiente:

- Primera ley de Newton: Un cuerpo en reposo permanece en reposo, y un cuerpo en movimiento permanece en movimiento uniforme, a menos que actuésobre él una fuerza externa desequilibradora.
- Segunda ley de Newton: Siempre que una fuerza desequilibradora actúa sobre un cuerpo, produce una aceleración en su misma dirección tal que ésta es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.
- Tercera ley de Newton: Para toda acción debe existir una reacción igual y opuesta.

Línea de visión. Se le llama a la línea recta que va del ojo del observador al objeto observado.

Línea Espectral. Las líneas brillantes que aparecen en ciertas longitudes de onda de un espectro son líneas espectrales en emisión y las líneas oscuras son líneas en absorción. Las líneas brillantes resultan de que el observador recibe una mayor intensidad de luz con esas longitudes de onda, mientras que las líneas oscuras se deben a que en esas longitudes de onda se recibe menos luz debido a la absorción del medio que está entre el objeto emisor y el observador.

Lluvia de Estrellas. Una lluvia de estrellas se produce cuando la Tierra pasa cerca de la trayectoria de un cometa, aunque éste haya pasado ya hace mucho tiempo, y las partículas de polvo del cometa caen a la Tierra. Las partículas al entrar a la atmósfera a gran velocidad, se calientan por la fricción dejando un destello luminoso conocido como "estrella fugaz". Como el cometa deja una gran cantidad de partículas se pueden llegar a ver muchas estrellas fugaces semejando una lluvia de estrellas. Las partículas pueden ser tan pequeñas como un grano de ázucar.

Longitud galáctica. La longitud galáctica (l) de una estrella es el ángulo entre la línea recta que une al Sol con el centro galáctico y la línea recta que une al Sol con dicha estrella.

Luminosidad. La luminosidad (L) de una estrella es la cantidad de energía por segundo que emite dicha estrella ($erg\ s^{-1}$). La luminosidad está relacionada al **flujo** (F) por $L = 4\pi R^2 F$, donde R es el radio de la estrella.

Magnitud. Parámetro que se usa para medir el brillo de un objeto celeste (Véase 5.3 en la página 119).

Magnitud aparente. Se refiere al "brillo observado" de un objeto celeste. Esto es, el **flujo** que recibimos de dicho objeto ($F = [erg\ s^{-1}\, cm^{-2}]$). La magnitud aparente se define como $m - m_0 = -2{,}5\, log\left(\frac{F}{F_o}\right)$, donde F_o es un flujo de referencia, el cual corresponde a una estrella de magnitud cero.

Magnitud absoluta. Es la magnitud que tendría una estrella si estuviera situada a una distancia de 10 *parsecs*. La magnitud absoluta de una estrella está definida como

$$m - M = 5log\left(\frac{r}{10pc}\right),$$

donde m y M son la *magnitud aparente y absoluta* de una estrella, respectivamente, y r la distancia a la estrella en unidades de pc.

Materia oscura. Casi toda la información que recibimos del universo es por medio del estudio de los fotones emitidos por los objetos celestes. A la diferencia entre la masa inferida a través de la radiación recibida, "masa luminosa", y la masa total, se le denomina materia oscura, cuya existencia es inferida solamente por su fuerza de gravedad.

Medio Interestelar (MI). Al espacio entre las estrellas se le llama Medio Interestelar (MI). El MI no está vacío sino que contiene gas y **polvo** en forma de nubes individuales y de un medio difuso. Una de las nubes de gas y polvo más conocidas es la Nebulosa de Orión. Gran parte de la materia del universo que observamos está en forma de gas (en las estrellas, en el

MI, etc). El gas del MI está compuesto principalmente por Hidrógeno atómico aunque también tiene otras especies atómicas como el oxÃgeno (O), carbono (C), etc. En el gas también hay diversas moléculas, de las cuales la más abundante es el H_2. Hasta la fecha se han detectado más de 120 diferentes moléculas, dentro de las que podemos mencionar agua (H_2O), monóxido de carbono (CO) y metanol (CH_3OH). El medio interestelar también contiene rayos cósmicos y campos magnéticos.

Meridiano. El meridiano de un lugar dado es la semicircunferencia de un **círculo mayor** que va de un polo de la Tierra a otro pasando sobre dicho lugar. Los meridianos los podemos imaginar como los gajos de una naranja, donde, como es de suponer, la Tierra es la naranja. El meridiano celeste es el círculo mayor que pasa por los polos y el cenit del lugar. Para visualizar los meridianos celestes también podemos, imaginariamente, sobreponer en la Esfera Celeste gajos tipo naranja.

Meteoro. Cuerpo sólido que gira alrededor del Sol y da lugar a una estrella fugaz cuando en su trayectoria penetra en la atmósfera de la Tierra. El tamaño de la gran mayoría de los meteoros es el de un grano de polvo, pero los hay mayores, sin ningún límite definido; los más grandes pueden tener una masa de varias toneladas.

Molécula. Es la partíula más pequeña de una sustancia que mantiene las propiedades químicas específicas de esa sustancia. Si una molécula se divide en partes aún más pequeñas, éstas tendrán una naturaleza diferente de la sustancia de original.

Momento de inercia. Resistencia que un cuerpo en rotación opone al cambio de su velocidad de giro. A veces se denomina inercia rotacional, el cual se representa por I definida como:

$$I = mr^2,$$

donde m es la masa del objeto y r es la distancia de la partícula al eje de rotación.

Movimiento de rotación. Movimiento que obliga a todos los puntos de un sólido a describir arcos de igual amplitud pertenecientes a circunferencias cuyos centros se hallan en una misma recta o eje de giro, que puede ocupar cualquier posición en el espacio. Para la Tierra el movimiento de rotación dura 24 hrs.

Movimiento de traslación. Son movimientos directos que mantienen la forma y el tamaño de los objetos. El movimiento de traslación de la Tierra, alrededor del Sol, tiene una duración de un año con una velocidad de $106\,000\frac{km}{h}$, o bien aproximadamente $30\frac{km}{s}$.

Nadir. Es el punto imaginario en la bóveda celeste que está bajo el observador y cuya posición es opuesta al **cenit**. Si recordamos que la bóveda celeste se extiende por debajo de nuestro horizonte y nos imaginamos nuestro horizonte como un vidrio transparente en el que estamos parados, entonces, el nadir es el punto de la esfera celeste que está debajo de nuestros pies.

Nebulosa planetaria. En la etapa final de la vida de una estrella, se expulsan las capas externas, mientras que el núcleo se contrae a su estado más compacto. Las estrellas que no explotan como supernova, por ser de masas menores a 3 $M_\odot$, también expulsan una gran cantidad de material al medio interestelar. Al cascarón de gas y polvo que se forma en torno a dichas estrellas se le llama nebulosa planetaria. Se les llama planetarias porque en las primeras observaciones (con telescopios de menor **resolución** que los actuales) parecían ser objetos "esféricos" como los planetas.

Nubes Moleculares (NM). Son regiones con temperaturas típicas de 10 a 20 K, densidades de entre 1 y 10^3 partículas/cm^3 y tamaños de hasta varias decenas de *parsecs*. Su composición es de $\sim 90\,\%$ Hidrógeno molecular, $\sim 10\ \%$ de He y trazas de diversas moléculas como CO, NH_3, H_2O, etc. Se encuentran principalmente en el plano galáctico.

Nutación. Es una oscilación del eje terrestre debida a la influencia gravitacional de la Luna. Una oscilación del eje polar, debida a la nutación, tiene un período de 18 *años* y 220 *días*. El movimiento de nutación y el de **precesión** se superponen.

Parábola y superficie parabólica. Las superficies parabólicas son muy útiles en Astronomía. Muchos telescopios y radiotelescopios usan paraboloides de revolución como superficies reflectoras. Un paraboloide de revolución idealmente hace converger a un sólo punto, llamado foco, una onda plana que incide paralela al eje de dicho paraboloide. Además, todos los haces reflejados, por los diferentes elementos de área de la superficie, idealmente, recorren la misma distancia hasta el foco.

Paralelo. El paralelo de un lugar dado es la circunferencia de un círculo menor que pasa por dicho lugar y que es paralelo al plano ecuatorial.

Parsec. El *parsec* (*pc*) es una unidad de longitud que se usa mucho en Astronomía y que equivale a la distancia desde la cual el radio medio de la órbita terrestre abarca un ángulo de 1" (1 segundo de arco). Más concretamente: 1 $pc = 3.09 \times 10^{16}\ m = 3.26$ *años* luz $= 2.06 \times 10^5\ UA$.

Perihelio. Es la posición en la que un objeto que está en órbita alrededor del Sol se encuentra a la distancia mínima.

Período sidéreo. Es el tiempo que tarda un planeta u otro objeto, que gira en torno al Sol, en dar una vuelta completa en su órbita, tomando como referencia a las estrellas.

Período sinódico. Es el tiempo transcurrido entre dos configuraciones similares de un planeta, la Tierra y el Sol. También se usa para otros objetos que giran alrededor del Sol y depende de la diferencia entre los períodos sidéreos del objeto en cuestión y del período sidéreo de la Tierra.

Peso. Los términos peso y masa se utilizan indistintamente en el lenguaje cotidiano. Sin embargo, sí hay diferencia entre ellos: el peso de un objeto es igual a la fuerza de gravedad que actúa sobre dicho objeto mientras que la masa del objeto, es la cantidad de materia que éste tiene. Para encontrar el peso de un objeto (en $Newtons$), se multiplica la masa (en $kilogramos$) por la aceleración (en m/s^2) debida a la fuerza de gravedad.

Planeta. Cuerpo celeste que no tiene luz propia y que orbita alrededor del Sol o cualquier otra estrella. En nuestro Sistema Solar, los cuatro planetas más cercanos al Sol son sólidos, mientras que los lejanos son líquidos y gaseosos (a excepción de Plutón). Los cometas y asteroides, por su tamaño no caen en la categoría de planetas. A los asteroides, por su tamaño, se les conoce como "planetas menores". Además de los planetas del Sistema Solar hay planetas, llamados extrasolares, girando en torno a otras estrellas. Hasta ahora se han detectado cerca de 200 planetas extrasolares.

Plano de la eclíptica. Es un plano sobre el cual la Tierra describe su movimiento de traslación alrededor del Sol, ver Eclíptica.

Plano ecuatorial. Es el plano imaginario que pasa por el centro de la Tierra y es perpendicular al Eje Polar.

Plano horizontal. Ver **Horizonte**.

Polo. El polo geográfico es un punto en el que se intersectan el eje polar y la superficie de la Tierra. Dado que la Tierra es como un imán también tiene dos polos magnéticos, pero la ubicación de estos difiere de la de los polos geográficos.

Polvo interestelar. El polvo es una componente importante del MI, se encuentra en nubes individuales en los brazos espirales de las galaxias. Este polvo comprende aproximadamente el 10 % de la materia interestelar. Los granos de polvo están constituidos principalmente de Carbono y Silicio y tienen tamaños desde ∼10 nanómetros hasta ∼1 micra. En algunas imágenes astronómicas, como en la nebulosa Cabeza de Caballo que está en la constelación de Orión, se ven zonas oscuras en las que aparentemente no hay estrellas. Lo que en realidad ocurre es que una nube de polvo absorbe la luz de las estrellas que están detrás de ella.

Precesión. Este efecto se debe al hecho de que la Tierra no es completamente esférica sino que es un elipsoide irregular, aplastado en los polos. La precesión es un movimiento circular que realiza el eje terrestre y que completa en un período en 25 800 *años*. Este movimiento produce variaciones de las coordenadas astronómicas.

Protón. Partícula nuclear con carga positiva igual en magnitud a la carga negativa del electrón; junto con el neutrón, está presente en todos los núcleos atómicos.

Pulsar. Estrella de neutrones que gira rápidamente y que emite un intenso haz de radiación electromagnética. Para un observador, ese haz es como la luz de un faro que verá como si fueran pulsos de luz. Debido a eso se les llama pulsares. Las estrellas de neutrones tienen un diámetro del orden de 10 km y poseen un campo magnético muy intenso. Se cree que los pulsares se forman en algunas explosiones de supernovas.

Punto vernal. El **plano de la eclíptica** está inclinado 23.5° respecto del **plano ecuatorial**. Entonces, el plano eclíptico y el **ecuador** celeste se intersectan en sólo dos puntos. El punto vernal es el punto de intersección en el que el movimiento del Sol sobre la esfera celeste va de Sur a Norte. Al punto vernal también se le llama primer punto de Aries.

Región HII. Una región HII es una nube de gas ionizado por la radiación ultravioleta de estrellas jóvenes y masivas. Las regiones HII tienen temperaturas de $\sim 10\,000$ K, densidades típicas de entre 100 y 1 000 partículas cm^{-3} y tamaños de 0.1 a ~ 1 pc.

Remanente de supernova (RSN). A la nube de gas y polvo que se produce tras una explosión de supernova se le llama Remanente de Supernova. El material que forma una RSN viaja a velocidades de varios miles de kilómetros por segundo.

Resolución angular. La resolución angular es la capacidad de distinguir objetos cercanos y está dada por

$$\phi \approx \frac{\lambda}{D}, \tag{B.1}$$

donde λ es la longitud de onda y D, el diámetro del objetivo óptico del instrumento con el que se observa.

Solsticio. Punto de la eclíptica en el que el Sol está más alejado del Ecuador Celeste. En dos puntos de la eclíptica se produce esta máxima distancia, uno ocurre en invierno y el otro en verano. En el verano el Sol llega a su posición extrema Norte, en relación al Ecuador Celeste; y en el invierno, a su posición extrema Sur.

Supernova (SN). Explosión que puede ocurrir al final de la vida de una estrella. Hay dos clases de supernova: SN tipo I y SN tipo II. La SN tipo I es una explosión por la acreción del material en un sistema binario. La SN tipo II es la explosión de una estrella masiva ($M \geq 3M_\odot$), en la que una gran parte de la masa de la estrella original se lanza al espacio a grandes velocidades. Durante unos días, la supernova puede brillar más que toda la galaxia que habita. La última explosión de supernova ocurrida en nuestra galaxia fue observada en el año 1604. Sin embargo, la distancia a este objeto celeste es de ~13000 años luz; entonces, la explosión en realidad ocurrió miles de años antes de ser registrada en la Tierra. Una SN tipo II deja una estrella colapsada que, dependiendo de su masa, será un hoyo negro ($M_{re} > 1{,}4M_\odot$) o una **estrella de neutrones** ($M_{re} \leq 1{,}4M_\odot$).

Telescopio. El telescopio es un instrumento óptico que aumenta el **ángulo subtendido** por un objeto. Esto permite que a objetos que están a grandes distancias, y por lo cual a simple vista subtienden ángulos muy pequeños, los veamos subtender ángulos más grandes. Por eso podemos verlos como si estuvieran más cerca de nosotros.

El funcionamiento básico de un telescopio consiste en captar haces de luz lo más separados posible entre sí pero procedentes de un mismo objeto y concentrarlos en un solo punto. Posteriormente, por medio de un ocular, se puede ver la imagen aumentada. A los telescopios que utilizan un espejo, para captar la luz, se les llama telescopios reflectores; a los que utilizan una lente se les conoce como telescopios refractores.

Temperatura efectiva. La temperatura efectiva de un objeto dado es la temperatura a la que debería estar un cuerpo negro para emitir el mismo **flujo total** que el que observamos del objeto. Entonces, la temperatura efectiva (T_{ef}) de una estrella se relaciona con el **flujo** mediante la ecuación $F = \sigma T_{ef}^4$, donde σ es la constante de Stephan-Boltzmann.

Temperatura de brillo. La temperatura de brillo de un objeto, en una longitud de onda dada ($\lambda_\circ$), es la temperatura a la que debería de estar un cuerpo negro para emitir, el mismo flujo (en $\lambda_\circ$) que el objeto.

Tipo Espectral. Las estrellas se clasifican con respecto a su espectro en siete clases (O, B, A, F, G, K y M). Como el espectro de una estrella depende de la temperatura en la superficie de la misma, entonces la clasificación espectral hace una distinción de las estrellas por su temperatura. Las estrellas de clase O tienen las temperaturas más altas mientras que las de clase M, las más bajas. Dentro de cada clase hay estrellas con diferentes temperaturas. Por eso, cada clase se divide en subclases denotadas por un número después de la letra. Por ejemplo, las temperaturas de las estrellas de clase O3 son de $\sim 35\,000\ K$ mientras que las temperaturas de las estrellas O9 son de $\sim 20\,000\ K$. Las estrellas de la clase M8 son de $\sim 2\,500\ K$. El Sol tiene una temperatura de aproximadamente $5\,700\ K$ y su clase espectral es G2.

Unidad Astronómica (UA). Es la distancia promedio entre el Sol y la Tierra. $1UA \approx 150\,000\,000\ km$. La UA es una unidad de longitud muy usada en Astronomía.

Velocidad angular. Magnitud vectorial que caracteriza la variación del ángulo recorrido por un objeto en movimiento que describe una trayectoria circular o de un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo. Se representa por ω y su unidad es el $\frac{rad}{s}$.

Vertical. La vertical de una estrella es el **círculo mayor** que pasa por dicha estrella y por el cenit del lugar donde está el observador.

Índice alfabético